CAPITOLUL 3
CIRCUITE DINAMICE

3.1. Introducere.

Comportarea circuitelor rezistive, formate din surse independente si rezistoare multipolare este descrisa, asa cum s-a aratat în Capitolul 2, de un sistem de ecuatii algebrice. În acest capitol se va introduce o clasa noua de elemente de circuit a caror comportare este descrisa de ecuatii diferentiale. Aceste elemente de circuit se numesc *elemente dinamice*. Cele mai simple elemente din aceasta clasa sunt doua elemente dipolare: condensatorul liniar si bobina liniara. Ecuatia de functionare a condensatorului liniar este $\mathrm{i(t)} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{du(t)}}{\mathrm{dt}}$ unde *u(t)* este tensiunea la bornele condensatorului, *i(t)* este curentul prin condensator si *C* este o constanta numita capacitatea condensatorului. Ecuatia de functionare a bobinei liniare este $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ unde L este o constanta numita inductivitatea bobinei.

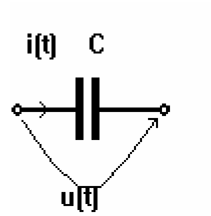
Un circuit care contine cel putin un element dinamic se numeste *circuit dinamic*. Elementele dinamice ideale sunt, spre deosebire de rezistoare, elemente fara pierderi adica ele nu disipa energia ci o acumuleaza. Energia acumulata la un moment dat de un astfel de element poate fi ulterior cedata circuitului în care este conectat elementul respectiv.

3.2. Elementele dinamice de circuit

3.2.1. Condensatorul ideal.

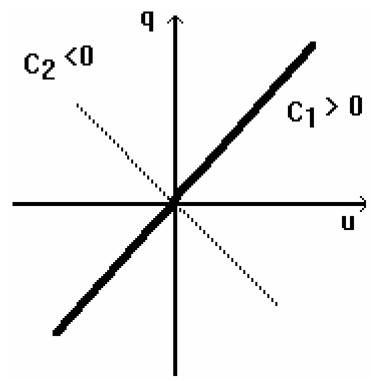
Din teoria campului electromagnetic se stie ca relatia intre sarcina q a unui corp si curentul absorbit de acesta este $i = \frac{dq}{dt}$. Ca urmare un element dipolar de circuit poate fi caracterizat, pe langa perechea {u(t), i(t)}, si de *sarcina electrica q(t)* definita de relatia. $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ în care $q(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau$ este sarcina in momentul t_0.

Condensatorul ideal este un element dipolar de circuit pentru care multimea perechilor admisibile {q(t), u(t)} poate fi reprezentata în planul q-u printr-o curba de ecuatie *f(q,u)=0*. Aceasta curba este *caracteristica q*-u a condensatorului si ecuatia *f(q,u)=0* este *ecuatia* sa *constitutiva*. Daca *f(q,u)=0* este aceeasi pentru orice moment de timp, condensatorul este invariant în timp.



Marimea $C_d = \left.\frac{dq}{du}\right|_{u_0} = tg\alpha\big|_{u_0}$ se numeste *capacitatea dinamica* a condensatorului la tensiunea u_0.

Daca caracteristica condensatorului este o dreapta care trece prin origine condensatorul este *liniar* iar marimea C_d este constanta în raport cu q si u si se numeste *capacitatea* condensatorului liniar $C = \frac{q}{u}$.



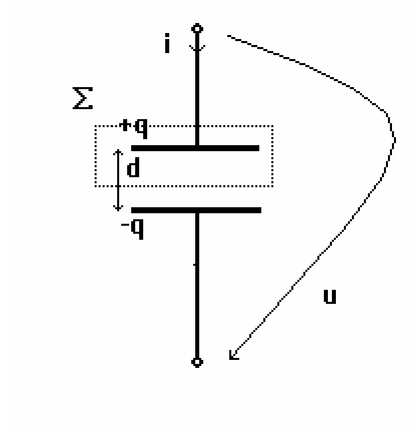
Unitatea de masura a capacitatii este faradul ($1F = \frac{1C}{1V}$), în practica folosindu-se submultiplii sai microfaradul ($1\mu F = 10^{-6}$ F) , nanofaradul ($1nF = 10^{-9}$ F) si picofaradul ($1pF = 10^{-12}$F).

Daca caracteristica condensatorului nu este o dreapta care trece prin origine atunci condensatorul este *neliniar*. Un condensator este controlat în tensiune daca ecuatia sa constitutiva poate fi scrisa ca o functie $q = \hat{q}(u)$ si este controlat în sarcina daca exista functia $u = \hat{u}(q)$. Comportarea acestui element de circuit este descrisa de ecuatia constitutiva *f(q,u)=0* la care se adauga ecutia $i = \frac{dq}{dt}$. În unele cazuri se poate explicita dependenta dintre curent si derivata tensiunii în raport cu timpul; aceasta dependenta este *ecuatia de functionare* a condensatorului. De exemplu:

-pentru un condensator liniar invariant în timp : $q = Cu$ si $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$

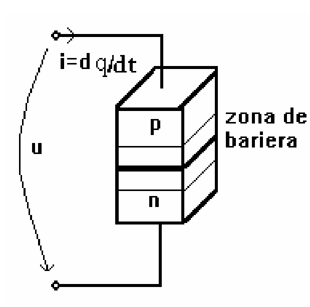
-pentru un condensator neliniar controlat în tensiune : $i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du}\ \frac{du}{dt} = C_d\ \frac{du}{dt}$

Condensatorul ideal modeleaza un efect capacitiv. În continuare sunt date doua exemple: *Condensatorul cu armaturi plane si paralele* este format din doua placi conductoare dreptunghiulare separate de un dielectric. Daca aria fiecarei placi este A , distanta dintre placi este d si permitivitatea dielectrica a izolantului este ε, se stie din teoria campului electromagnetic ca daca placa superioara se încarca cu sarcina q, atunci cea inferioara se incarca cu sarcina -q, iar capacitatea condensatorului este $C = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon A}{d}$. Acest condensator este invariant în timp si liniar.

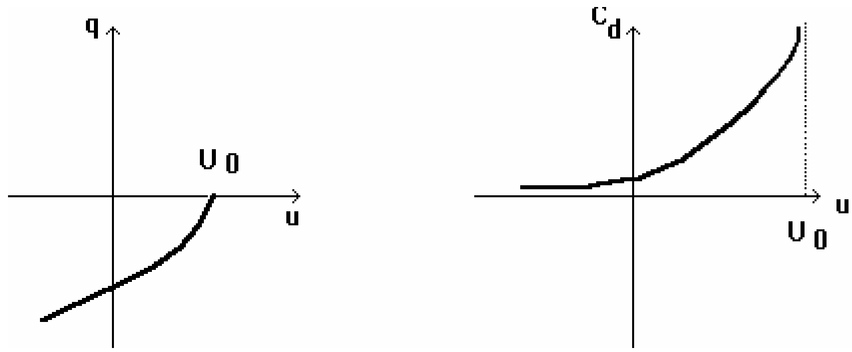


Daca una dintre placi se misca ramanand paralela cu cealalta, atunci condensatorul este variabil în timp si liniar avand capacitatea $C(t) = \frac{\varepsilon A}{d(t)}$. Derivand pe $q(t)$ in raport cu timpul rezulta $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ adica expresia legii conservarii sarcinii electrice pentru o suprafata inchisa Σ care contine o armatura a condensatorului.

Dioda varactoare este o jonctiune p-n alimentata în conductie inversa la care apare efectul capacitiv de bariera. În jurul suprafetei de separatie intre semiconductorul de tip p si cel de tip n se formeaza în conductie inversa (i<0) o zona de largime variabila în functie de u, numita zona de bariera care actioneaza ca un izolant plasat intre cele doua zone conductoare de tip p si de tip n.



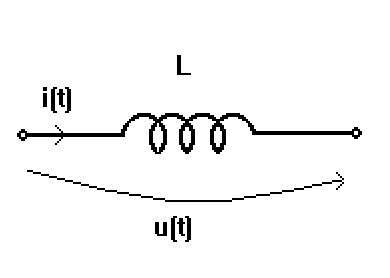
Dependenta dintre sarcina q acumulata în zona p si tensiunea aplicata este neliniara, condensatorul fiind controlat în tensiune numai pentru $u<U_0$. Capacitatea dinamica nu este definita decat pentru $u<U_0$. Pentru $u>U_0$ dispozitivul se comporta rezistiv. Dioda varactoare are multe aplicatii practice ca de exemplu reglajul frecventei în receptoarele de radio si TV.



3.2.2. Bobina ideala

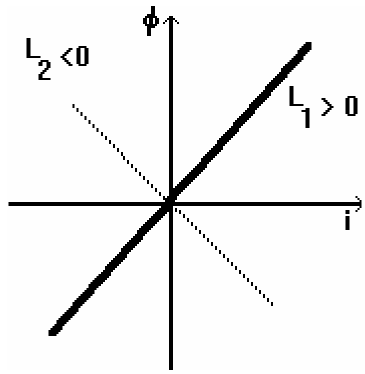
Din teoria campului electromagnetic se stie ca relatia intre fluxul magnetic φ(t) al unei bobine si tensiunea u(t) la bornele acesteia este $u(t)=\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$. Ca urmare un element dipolar de circuit poate fi caracterizat, pe langa perechea {u(t), i(t)}, si de *fluxul magnetic* φ(t) definit de relatia. $\varphi(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}u(\tau)d\tau$ în care $\varphi(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0}u(\tau)d\tau$ unde $\varphi(t_0)$ este fluxul magnetic in momentul t_0.

O bobina este un element dipolar de circuit pentru care multimea perechilor admisibile {φ(t), i(t)} poate fi reprezentata în planul φ-i printr-o curba de ecuatie f(φ,i)=0. Aceasta curba este *caracte-*



ristica φ-i a bobinei si ecuatia f(φ,i)=0 este *ecuatia* sa *constitutiva*. Daca f(φ,i)=0 este aceeasi pentru orice moment de timp, bobina este invarianta în timp.

Marimea $L_d=\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_{i_0}=\left.tg\alpha\right|_{i_0}$ se numeste *inductivitatea dinamica* a bobinei la curentul i_0. Daca caracteristica bobinei este o dreapta care trece prin origine bobina este *liniara* si marimea L_d devine constanta în raport cu φ si i si se numeste *inductivitatea* bobinei liniare $L = \frac{\varphi}{i}$. Unitatea de masura a inductivitatii este 1 henry (1H= 1Wb/1A); în practica se folosesc submultiplii milihenry (mH) si microhenry (μH).



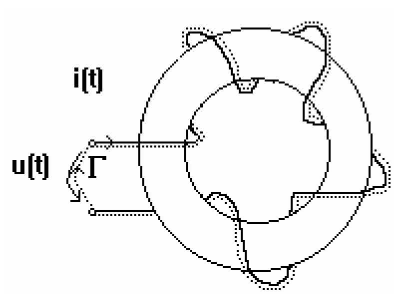
Daca caracteristica bobinei nu este o dreapta care trece prin origine atunci bobina este *neliniara*. O bobina este controlata în curent daca ecuatia sa constitutiva poate fi scrisa in forma $\varphi = \hat{\varphi}(i)$ si este controlata în flux daca exista functia $i = \hat{i}(\varphi)$. Comportarea acestui element de circuit este descrisa de ecuatia constitutiva *f(*φ*,i)=0* la care se adauga ecutia $u = \frac{d\varphi}{dt}$. În unele cazuri se poate explicita dependenta dintre tensiune si derivata curentului în raport cu timpul; aceasta dependenta este *ecuatia de functionare* a bobinei. De exemplu:

-pentru o bobina liniara invarianta în timp : $\varphi = Li$ si $u = \frac{d\varphi}{dt} = L\frac{di}{dt}$

-pentru o bobina neliniara controlata în curent : $u = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{di} \frac{di}{dt} = L_d \frac{di}{dt}$

Bobina ideala modeleaza un efect inductiv. În continuare se prezinta trei exemple.

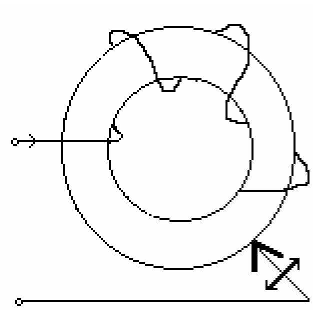
Bobina toroidala liniara este formata dintr-un conductor bobinat pe un tor izolant. Aria transversala a torului este A, circumferinta medie a torului este l, $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m este permeabilitatea magnetica a



torului si bobina are N spire. Se stie din teoria campului electromagnetic ca fluxul magnetic $\Phi_{S\Gamma}$ prin orice suprafata S_Γ care se sprijina pe un contur Γ inchis care urmareste conturul conductorului si linia tensiunii la borne este legat de curentul i prin relatia $\Phi_{S\Gamma}$=Li unde $L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$ este inductivitatea

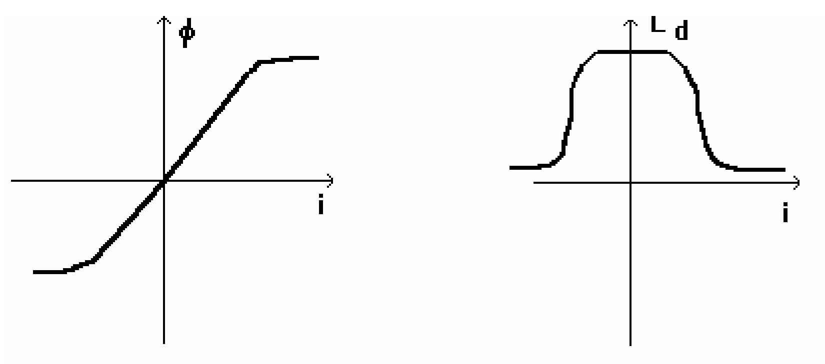
bobinei. L este o constanta în raport cu $\Phi_{S\Gamma}$ si deci aceasta bobina este invarianta în timp si liniara. Daca una dintre bornele bobinei este legata la un contact mobil, astfel incat numarul de spire variaza cu

pozitia contactului, atunci bobina este variabila în timp si liniara avand inductivitatea $L(t) = \mu_0 \frac{N^2(t) A}{l(t)}$.



Derivand pe φ(t)= $\Phi_{S\Gamma}(t)$ in raport cu timpul rezulta $u = \frac{d\varphi}{dt}$ adica expresia legii inductiei electromagnetice pentru curba inchisa Γ.

Bobina toroidala neliniara. Daca miezul bobinei din exemplul precedent este construit din fier moale atunci caracteristica $\Phi_{S\Gamma}(i)$ este neliniara, bobina fiind controlata în curent.



Jonctiunea Josephson este formata din doua supraconductoare separate de un strat izolant (oxid de beriliu). În fizica supraconductoarelor se arata ca dependenta dintre i si Φ este sinusoidala $i = I_0 \sin k\Phi$ unde k este o constanta în raport cu i si Φ. Acest dispozitiv se comporta ca o bobina invarianta în timp neliniara si controlata în flux.

3.2.3. Proprietati ale condensatoarelor si bobinelor.

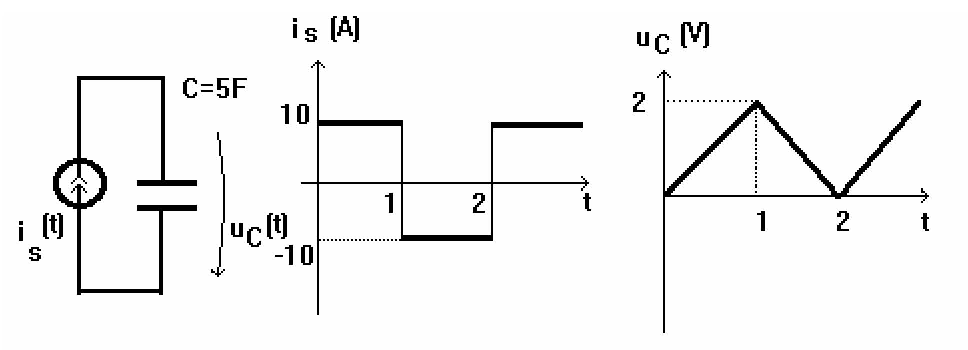
3.2.3.1. Memoria.

La un rezistor dipolar controlat în tensiune curentul i(t) depinde numai de tensiunea din acelasi moment ($i(t) = f_1(u(t))$) iar la un rezistor controlat în curent $u(t)=f_2(i(t))$ ceeace insemna ca rezistoarele nu au memorie.

La orice condensator sarcina *q(t)* depinde de valorile curentului intr-un interval de timp $[t_0,t]$ si de sarcina $q(t_0)$ $[q(t)=q(t_0)+\int_{t0}^{t} i(\tau)d\tau]$. Similar, fluxul magnetic prin bobina $\varphi(t)$ depinde de $\varphi(t_0)$ si de valorile tensiunii bobinei în intervalul $[t_0,t]$ $[\varphi(t)= \varphi(t_0) + \int_{t0}^{t} u(\tau)d\tau]$. Aceasta inseamna ca *bobina si condensatorul sunt elemente de circuit cu memorie*, spre deosebire de rezistor.

3.2.3.2. Continuitatea lui u_C si i_L

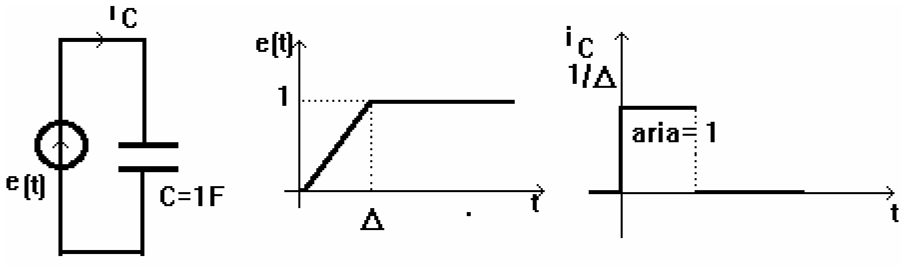
Fie condensatorul din figura de mai jos prin care trece curentul $i_S(t)$ care are discontinuitati finite. Rezulta ca daca $u_C(0)=0$ atunci $u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\tau)d\tau$ si $u_C(t)$ este o functie continua. Pe baza proprietatii de continuitate a integralei unei functii cu discontinuitati finite rezulta:



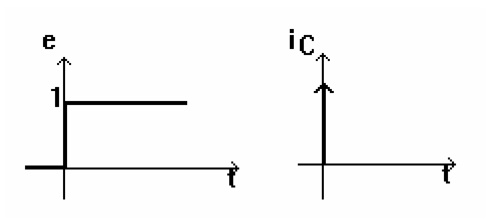
a)daca curentul $i_C(t)$ printr-un condensator liniar invariant în timp este marginit si are un numar finit de discontinuitati în intervalul $[t_0, t_p]$ atunci tensiunea condensatorului $u_C(t)$ este continua în acest interval;

b)daca tensiunea $u_L(t)$ pe o bobina liniara invarianta în timp este marginita si are un numar finit de discontinuitati în intervalul $[t_0, t_p]$ atunci curentul prin bobina $i_L(t)$ este continuu în acest interval.

Daca $i_C(t)$, respectiv $u_L(t)$, nu sunt marginite atunci $u_C(t)$, respectiv $i_L(t)$ nu sunt marimi continue. De exemplu daca condensatorul din figura de mai jos este alimentat cu tensiunea e(t) (e(t) este o functie continua de timp), atunci $i_C(t)$ va avea discontinuitati finite. Daca $\Delta \to 0$ atunci e(t) devine



functia treapta unitate care are o discontinuitate în t=0 si $i_C(t)$ nu mai este marginit. Cand $\Delta \to 0$ dreptunghiul isi mentine aria unitara latimea sa tinzand catre zero si inaltimea sa spre infinit. Semnalul obtinut astfel se numeste *impuls unitar* sau *impuls Dirac* si se noteaza δ(t).



Functia δ(t) are o singularitate în t=0 si este nula pentru t≠0. Se poate arata usor ca $\int_{-\varepsilon 1}^{+\varepsilon 2} \delta(t)dt = 1$ pentru orice ε_1 si ε_2 strict pozitivi.

3.2.3.3. Caracterul nedisipativ (fara pierderi)

Energia pe care o primeste un rezistor liniar cu R>0 în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este: $W_R[t_1,t_2] = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2 dt$. Evident $W[t_1, t_2] \geq 0$ indiferent de semnul lui i(t). Daca rezistorul este neliniar si pasiv $[u(t)i(t) \geq 0]$ rezultatul este acelasi: rezistorul pasiv primeste energie din circuitul în care este conectat si aceasta energie se transforma în mod ireversibil în caldura (se disipa). Spunem ca *rezistorul pasiv este un element de circuit disipativ (cu pierderi).*

Energia absorbita de un condensator liniar în intervalul de timp $[t_1, t_2]$este

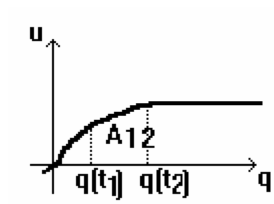
$$W_C[t_1,t_2] = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t) = \int_{t_1}^{t_2} C\frac{du(t)}{dt}u(t)dt = \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} Cudu = \frac{C}{2}[u^2(t_2) - u^2(t_1)]$$

Daca u(t) este periodica de perioada T si $t_2=t_1+T$, atunci $W_C[t_1, t_2]=0$ si energia medie absorbita de condensator intr-o perioada este nula. Aceasta inseamna ca puterea absorbita este pozitiva numai pe anumite subintervale din perioada T, în celelalte subintervale puterea absorbita fiind negativa. Deci condensatorul nu disipa energia ci o acumuleaza si apoi o reda circuitului în care este conectat. Un astfel de *element de circuit* este *nedisipativ (fara pierderi).*

Pentru un condensator controlat în sarcina [u=u(q)] rezultatul este similar:

$$W_C[t_1,t_2]=\int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)=\int_{t_1}^{t_2} u[q(t)]\frac{dq(t)}{dt}dt=\int_{q(t_1)}^{q(t_2)} u(q)dq=\mathrm{A}_{12}$$

, unde A_{12} este aria din figura.



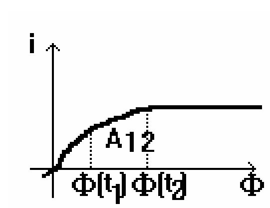
Daca $q(t_2)=q(t_1+T)$ atunci $A_{12}=0$ si $W_C[t_1, t_2]=0$.

Similar se poate arata ca o bobina liniara si o bobina neliniara controlata în flux sunt nedisipative. Pentru bobina liniara

$$W_L[t_1,t_2]=\int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} L\frac{di(t)}{dt}i(t)dt=\int_{i(t_1)}^{i(t_2)} Lidi=\frac{L}{2}[i^2(t_2)-i^2(t_1)]$$

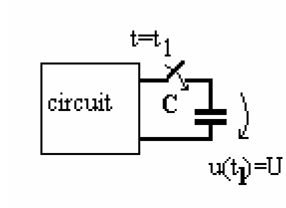
si pentru bobina neliniara controlata în flux cu caracteristica i=i(ϕ)

$$W_L[t_1,t_2]=\int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} i[\phi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt}dt=\int_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} i(\phi)d\phi=\frac{L}{2}[i^2(t_2)-i^2(t_1)]=\mathrm{A}_{12}$$



Din aceaste relatii rezulta ca în regim periodic (u(t) si i(t) sunt functii periodice de perioada T) la un element de circuit fara pierderi tensiunea si curentul trec prin valoarea zero la momente de timp diferite. Altfel produsul u(t)i(t) ar fi tot timpul pozitiv sau negativ si $W[t_1, t_2]$ ar fi nenula pe o perioada. De exemplu, în regim sinusoidal tensiunea unui condensator liniar este $u(t)=U\sin\omega t$ si curentul este i(t)=Cω cosωt=Cω sin(ωt +π/2) deci u(t) si i(t) trec prin zero la momente de timp distantate cu Δt = π/2ω.

Fie un condensator liniar cu capacitatea C>0 care in momentul t_1 este conectat la un circuit .

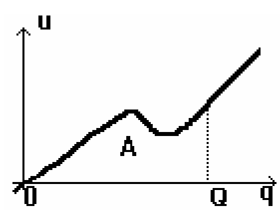


Stiind ca $u(t_1)$=U, energia absorbita de condensator este $W_C=[t_1,t_2]=\frac{C}{2}[u^2(t_2)-U^2]$. Daca

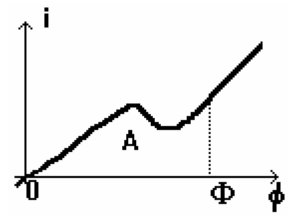
$|u(t_2)| < |U|$, atunci W_C [t_1, t_2] < 0 si condensatorul cedeaza energie circuitului la care este conectat.

Daca $u(t_2)$ = 0 condensatorul va ceda valoarea maxima a energiei W_{Cmax} [t_1, t_2]=$\frac{CU^2}{2}$. Deoarece aceasta este valoarea maxima a energiei ce se poate extrage din condensator este normal sa spunem ca *energia acumulata intr-un condensator liniar de capacitate C incarcat la tensiunea U este* E_C = $\frac{CU^2}{2}=\frac{Q^2}{2C}$. Similar se poate arata ca *energia acumulata intr-o bobina liniara de inductivitate L prin care trece curentul I este* $E_L=\frac{LI^2}{2}=\frac{\phi^2}{2L}$.

Pentru un condensator neliniar controlat în sarcina a carui caracteristica u=u(q) trece prin origine energia acumulata este $E_C=\int_0^Q u(q)dq$ = A

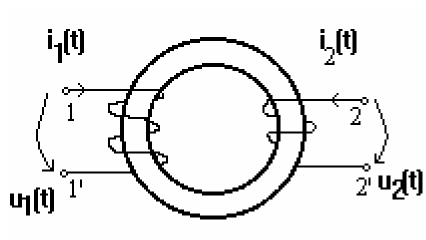


Pentru o bobina neliniara controlata în flux a carei caracteristica i = i(Φ) trece prin origine energia acumulata este $E_L(\varphi)=\int_0^{\phi} i(\varphi)d\varphi$ = A

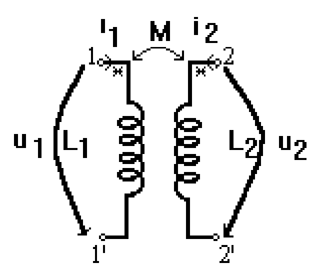


3.2.4 Bobinele cuplate

Bobinele cuplate se utilizeaza in circuitele de comunicatii si in echipamentele de masura. Transformatoarele electrice construite cu bobine cuplate au o importanta deosebita in transmiterea energiei electrice intre generatoare si utilizatori. Motoarele si generatoarele electrice se modeleaza prin bobine cuplate cu parametri variabili in timp.



Se considera un tor din material feromagnetic (ferita sau tole dintr-un otel special). Pe acest tor exista doua infasurari obtinandu-se astfel un diport. Daca la bornele de intrare 1,1' se conecteaza un generator si bornele de iesire 2,2' sunt in gol (i_2=0), in infasurarea 1 apare curentul i_1(t) care determina un camp magnetic in tor (variabil in timp daca tensiunea aplicata este variabila in timp), respectiv un flux magnetic variabil in timp. Conform legii inductiei electromagnetice, acest flux va determina aparitia unei tensiuni u_2(t) intre bornele 2 si 2'. Doua bobine cuplate magnetic se reprezinta astfel:

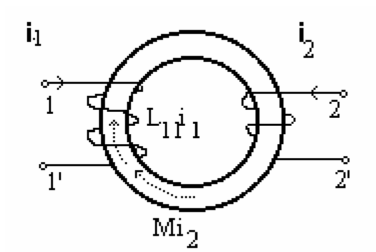


Un model liniar al acestui dispozitiv este dat de un sistem de ecuatii liniare care leaga curentii i_1, i_2 si fluxurile ϕ_1, ϕ_2 prin bobinele 1 si 2. Acest sistem reprezinta *ecuatia constitutiva a bobinelor liniare cuplate:*

$$\phi_1 = L_{11}\, i_1 \pm M i_2$$

$$\phi_2 = L_{22} i_2 \pm M i_1 .$$

unde L_{11} si L_{22} sunt inductivitatile proprii ale celor doua infasurari si M este inductivitatea mutuala dintre infasurari. Termenii $L_{11}\,i_1$ si $L_{22}i_2$ reprezinta fluxurile proprii ale bobinelor 1 si 2 iar termenii Mi_2 si Mi_1 reprezinta fluxurile mutuale. In teoria campului electromagnetic se arata ca fluxul propriu si fluxul mutual sau se aduna in ambele bobine, sau se scad in ambele bobine. Ca urmare semnele atasate



lui M sunt sau amandoua + sau amandoua -. De exemplu pentru bobina 1 din figura, cu sensurile date pentru i_1 si i_2 fluxul propriu $L_{11}\,i_1$ si fluxul mutual M i_2 sunt orientate în acelasi sens si deci M se considera cu semnul +. Daca i_2 are sensul invers celui din figura, atunci fluxul mutual este orientat invers fata de cel propriu si M se considera cu semnul -.

Pentru a preciza semnul lui M se foloseste *reprezentarea bobinelor cu borne polarizate:* daca cei doi curenti i_1 si i_2 “ataca” la fel bornele polarizate (ambii intra sau ambii ies din aceste borne), atunci in ecuatii se considera +M, iar daca i_1 si i_2 “ataca” in mod diferit aceste borne (un curent intra prin borna polarizata si celalalt curent iese prin borna polarizata) atunci in ecuatii se considera -M.

Ecuatia constitutiva a bobinelor cuplate se scrie matriceal $[\Phi] = [L]\bullet[I]$

unde $L = \begin{bmatrix} L_{11} & \pm M \\ \pm M & L_{22} \end{bmatrix}$ este matricea inductivitatilor.

Tensiunile u_1 si u_2 sunt date de $u_1 = \dfrac{d\phi_1}{dt}$ si $u_2 = \dfrac{d\phi_2}{dt}$ aceste relatii reprezentand *ecuatia de functionare a bobinelor cuplate.* Utilizand ecuatia constitutiva a bobinelor liniare rezulta:

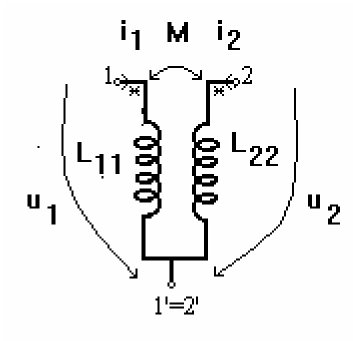
$$u_1(t) = L_{11}\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}$$

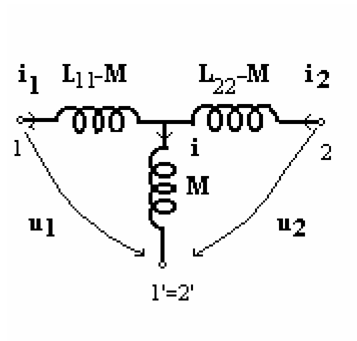
$$u_2(t) = L_{22}\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt}$$

sau, matriceal, $[U]=[L][\dot{I}]$

Daca nodurile 1' si 2' sunt legate intre ele atunci se poate obtine un diport echivalent cu trei bobine necuplate. Deoarece $i=i_1+i_2$, calculand $u_1(t)$ în diportul echivalent rezulta:

$u_1(t) = L_{11}\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + M(\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}) = L_{11}\frac{dil1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$. Similar rezulta $u_2(t) = L_{22}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$.





Similar cu elementele dipolare, pentru a calcula energia acumulata se considera conditii initiale nule ($i_1(0)=0$ si $i_2(0)=0$, respectiv $\phi_1(0)=0$ si $\phi_2(0)=0$). Se calculeaza energia absorbita de bobine intr-un interval de timp T:

$$W_M = \int_0^T [u_1(t)i_1(t)+u_2(t)i_2(t)]dt = \int_0^T [L_{11}\frac{di_1}{dt}i_1 + M\frac{di_2}{dt}i_1 + L_{22}\frac{di_2}{dt}i_2 + M\frac{di_1}{dt}i_2]dt$$
$$= \frac{1}{2}[L_{11}i_1{}^2(T) + L_{22}i_2{}^2(T) + 2Mi_1(T)i_2(T)]$$

Energia acumulata în bobine la momentul T poate fi calculata ca energia cedata de bobine în transformarea de la starea initiala la starea finala $i_1(T)=I_1$, $i_2(T)=I_2$.

$$W_M(I_1,I_2) = \frac{1}{2}[L_{11}I_1{}^2 + L_{22}{}^2I_2{}^2] + MI_1I_2$$

Din considerente fizice energia magnetica acumulata $W_M(I_1, I_2)$ este pozitiva pentru orice $I_1, I_2 \neq 0$. Rezulta ca L este pozitiv definita, deci minorii principali ai matricei L sunt pozitivi adica $L_{11} \geq 0$, $L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0$.

Inductivitatea mutuala se poate defini in functie de coeficientul de cuplaj $k = \frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$. Din $L_{11}L_{22} \geq M^2$ rezulta ca $|k|<1$. Valoarea k=0 corespunde bobinelor necuplate, iar valoarea k=1 corespunde cuplajului perfect.

În cazul mai multor bobine cuplate se obtin ecuatii similare. De exemplu trei bobine liniare cuplate au ecuatia de functionare

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} di_1(t)/dt \\ di_2(t)/dt \\ di_3(t)/dt \end{bmatrix}$$

In teoria campului electromagnetic se demonstreaza relatia $M_{jk}=M_{kj}$ (proprietatea de simetrie a matricei inductivitatilor).

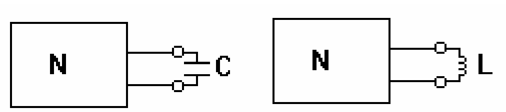
Ecuatia de functionare a unui sistem de bobine neliniare cuplate se obtine din relatiile $u_k = \frac{d\varphi_k}{dt}$ si ecuatiile constitutive. De exemplu pentru doua bobine neliniare controlate în curent cu ecuatiile constitutive $\Phi_1 = \hat{\Phi}_1(i_1, i_2), \Phi_2 = \hat{\Phi}_2(i_1, i_2)$ rezulta: $u_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{\partial\phi_1}{\partial i_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{\partial\phi_1}{\partial i_2}\frac{di_2}{dt}$ si

$u_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{\partial\phi_2}{\partial i_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{\partial\phi_2}{\partial i_2}\frac{di_2}{dt}$.

3.3 Circuite de ordinul intai

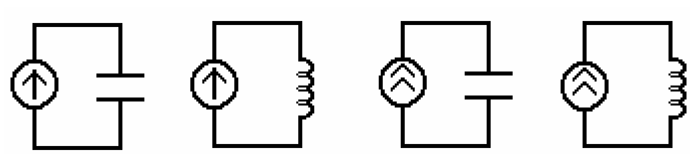
3.3.1. Introducere

Un circuit de ordinul intai contine un singur element dinamic. Ca urmare un astfel de circuit este format dintr-un dipol rezistiv N conectat cu elementul dinamic.



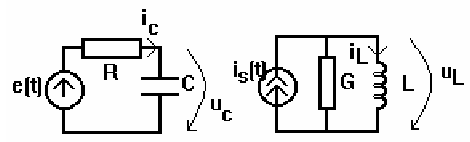
Un circuit liniar de ordinul intai contine elemente liniare de circuit (rezistoare, surse comandate liniar, elementul dinamic) si surse independente.

Dipolul rezistiv liniar N are un generator echivalent de tensiune si/sau un generator echivalent de curent în raport cu bornele elementului dinamic. Daca acest circuit echivalent contine numai sursa ($R_{ech}=0$ în cazul generatorului echivalent de tensiune si $R_{ech}=\infty$ în cazul generatorului echivalent de curent) atunci tensiunea sau curentul elementului dinamic sunt cunoscute si raspunsul



circuitului poate fi calculat foarte simplu. De exemplu daca $u_C = e(t)$ atunci $i_C = C\dfrac{de}{dt}$ sau daca $i_C = i_S(t)$ atunci $\upsilon_\chi = \dfrac{1}{X}\int_{\tau_0}^{\tau} \iota_\sigma(\tau)\delta\tau + \upsilon_\chi(\tau_0)$

În cazul general $0<R_{ech}<\infty$, N are atat un generator echivalent de tensiune cat si unul de curent. Rezulta ca este suficient sa consideram numai urmatoarele doua tipuri de circuite liniare de ordinul I.



Ecuatiile acestor circuite sunt:

$$Ri_C + u_C = e(t) \qquad\qquad Gu_L + i_L = i_S(t)$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} \qquad\qquad u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{RC} + \frac{e(t)}{RC} \qquad\qquad \frac{di_L}{dt} = -\frac{i_L}{GL} + \frac{i_S(t)}{GL}$$

Daca $u_C = x, \dfrac{du_C}{dt} = \dot{x}, RC = \tau, e(t) = s(t)$ Daca $i_L = x, \dfrac{di_L}{dt} = \dot{x}, GL = \tau, i_S(t) = s(t)$

atunci $\dot{x} = -\dfrac{x}{\tau} + \dfrac{s(t)}{\tau}$ atunci $\dot{x} = -\dfrac{x}{\tau} + \dfrac{s(t)}{\tau}$

Deci toate circitele liniare de ordinul intai satisfac ecuatia

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{s(t)}{\tau}$$

unde *x* este variabila de stare a circuitului, τ este constanta de timp a circuitului si *s(t)* parametrul sursei independente echivalente.

3.3.2.Circuite liniare cu surse independente de curent continuu

Aceste circuite contin numai surse independente de curent continuu deci $e(t)=E=ct$ sau $i_s(t)=I_s=ct$. Daca $\dfrac{dx}{dt} = 0$ atunci x ia valoarea $x(t_\infty)=E$ sau $x(t_\infty)=I_s$ numita si stare de echilibru. Ecuatia circuitului devine $\dot{x} = -\dfrac{x}{\tau} + \dfrac{x(t_\infty)}{\tau}$.

Determinam solutia acestei ecuatii pentru $t\in[t_0, +\infty)$ cunoscand conditia initiala $x(t_0)$. Solutia este formata din doi termeni: solutia ecuatiei omogene x_v si o solutie particulara x_p : $x=x_v+x_p$, $\dot{x}_v + \dfrac{x_v}{\tau} = 0$. Stiind ca x_v este de forma $x_v = Ae^{\alpha(t-t_0)}$, rezulta:

$$A\alpha e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{Ae^{\alpha(t-t_0)}}{\tau} = 0 \quad \text{deci } \alpha = -\frac{1}{\tau} \text{ si } x_v = Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Solutia particulara este constanta (de forma termenului liber) $x_p = x(t_\infty)$, deci. $x = Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + x(t_\infty)$.
Solutia este determinata numai daca se cunoaste conditia initiala $x(t_0)$.
$x(t_0) = A + x(t_\infty)$ deci $A = x(0) - x(t_\infty)$ si

$$x(t) = x(t_\infty) + [x(t_0) - x(t_\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Aceasta relatie se mai poate scrie:

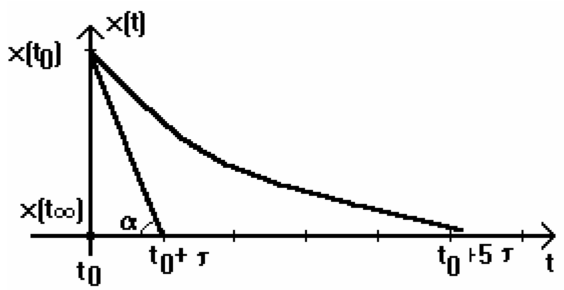
$$x(t) - x(t_\infty) = [x(t_0) - x(t_\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

Se observa ca daca starea initiala este chiar starea de echilibru $[x(t_0)=x(t_\infty)]$ atunci solutia ramane în aceasta stare.

Se disting doua cazuri în care comportarea solutiei este diferita: $\tau>0$ si $\tau<0$.

1⁰ $\tau>0$

In acest caz diferenta intre $x(t_0)$ si $x(t\infty)$ scade exponential în timp si pentru $t\to\infty$ $x(t)\to x(t\infty)$ deci starea de echilibru se obtine pentru $t\to\infty$



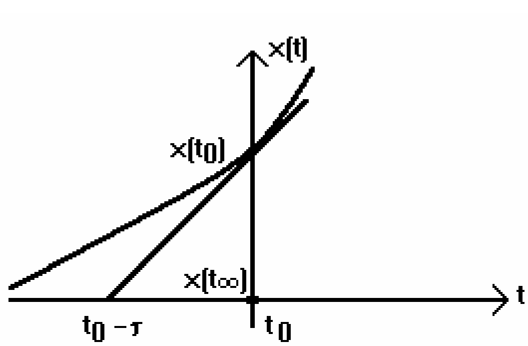
Tangenta în $t=t_0$ la $x(t)$ tre00ce prin punctul $(t_0+\tau, x(t\infty))$.

Intr-adevar $x'(t_0) = -tg\alpha = -\dfrac{x(t_0) - x(t\infty)}{\tau}$ asa cum rezulta atat din calculul derivatei cat si din figura.

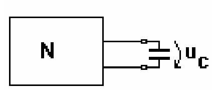
Dupa trecerea a cinci constante de timp se atinge practic valoarea $x(t\infty)$.

2⁰ $\tau<0$

În acest caz diferenta intre $x(t_0)$ si $x(t\infty)$ creste exponential în timp. Se observa ca pentru $t\to -\infty$ se atinge starea de echilibru. Cand $t\to\infty$ solutia tinde spre o valoare infinita. Similar cu cazul $\tau>0$ se poate arata ca tangenta la $x(t)$ în t_0 trece prin punctul $[t_0 - \tau, x(t\infty)]$.



Se poate arata ca orice tensiune sau curent din circuitul liniar de ordinul intai are o variatie similara în timp cu $x(t)$. Fie circuitul cu condensator în care $x(t)=u_c(t)$.



În circuitul rezistiv liniar N se aplica teorema superpozitiei considerand condensatorul inlocuit cu o sursa ideala de tensiune $u_c\,(t)= u_c\,(t_\infty)+[\,u_c\,(t_0\,)- u_c\,(t_\infty)]\,e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$.

O tensiune oarecare din circuit $u_k\,(t)$ se poate scrie ca:

$$u_k(t) = H_0 u_c(t) + \underbrace{\sum H_m E_m}_{\text{toate sursele de tensiune}} + \underbrace{\sum K_n I_{sn}}_{\text{toate sursele de curent}} \qquad (1)$$

Pentru $t=t_0$

$$u_k(t_0) = H_0 u_c(t_0) + \underbrace{\sum H_m E_m}_{\text{toate sursele de tensiune}} + \underbrace{\sum K_n I_{sn}}_{\text{toate sursele de curent}} \qquad (2)$$

Pentru $t=t\infty$

$$u_k(t_\infty) = H_0 u_c(t_\infty) + \underbrace{\sum H_m E_m}_{\text{toate sursele de tensiune}} + \underbrace{\sum K_n I_{sn}}_{\text{toate sursele de curent}} \qquad (3)$$

Scazand relatiile (3) si (2) obtinem

$$u_k(t_\infty) - u_k(t_0) = H_0[u_c(t_\infty) - u_c(t_0)] \qquad (4)$$

Scazand relatiile (1) si (3) si tinand seama de (4) rezulta:

$$u_k(t) - u_k(t_\infty) = H_0\left\{u_c(t_\infty) - u_c(t_\infty) + [u_c(t_\infty) - u_c(t_0)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right\} = [u_k(t_\infty) - u_k(t_0)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

adica orice tensiune din circuit variaza similar cu $u_c\,(t)$.
Similar se poate arata ca si orice curent are acelasi tip de variatie în timp.

În acest tip de circuite comportarea la $t=t_\infty$ este o comportare în curent continuu. Daca marimile sunt invariabile în timp atunci o bobina cu ecuatia de functionare $u_L = L\frac{di_L}{dt} = 0$ este echivalenta cu un rezistor cu $R=0$; un condensator cu ecuatia de functiune $i_C = C\frac{du_C}{dt} = 0$ este echivalent cu un rezistor cu $R=\infty$.

Din cele aratate pana acum rezulta o metoda simpla de determinare a unui raspuns $r(t)$ al unui circuit de ordinul intai. Aceasta metoda are urmatoarele etape:

1. Se inlocuieste elementul dinamic cu o sursa independenta (condensatorul se inlocuieste cu o sursa de tensiune $u_c\,(t_0\,)$ si bobina se inlocuieste cu o sursa de curent $i_L\,(t_0\,)$) si se calculeaza $r(t_0\,)$.

2. Se inlocuieste condensatorul cu un rezistor cu $R=\infty$ sau bobina cu un rezistor cu $R=0$ si se calculeaza $r(t_\infty)$.

3. Se determina rezistenta echivalenta R intre bornele elementului dinamic a circuitului N pasivizat si se calculeaza $\tau=RC$ sau $\tau = \frac{L}{R}$.

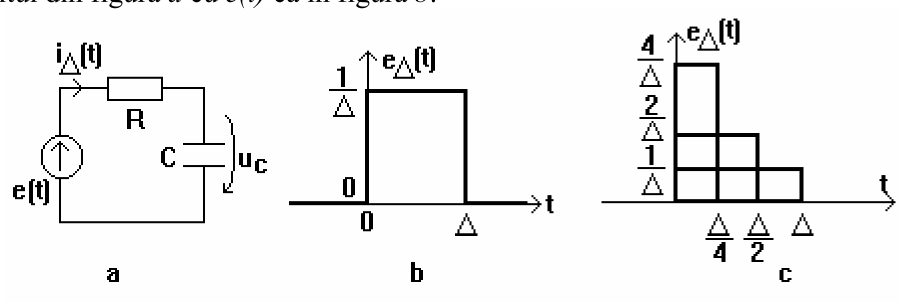
4. Se determina $r(t)$ cu relatia $r(t) = r(t_\infty) + [r(t_\infty) - r(t_0)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$

3.3.3. Circuite liniare cu surse cu parametri constanti pe intervale de timp

Analiza acestor circuite se face ca in paragraful precedent pe fiecare interval de timp in care sursele independente au parametri constanti. Se incepe cu intervalul [t_0, t_1], apoi valoarea $x(t_1)$ se considera ca stare initiala pentru analiza pe intervalul [t_1, t_2] s.a.m.d. Starea initiala si starea de echilibru se schimba pentru fiecare interval. In momentul t_j , comun intervalelor [t_{j-1}, t_j] si [t_j, t_{j+1}] cel putin o sursa independenta are un salt. Desi unele marimi din circuit vor avea un salt in t_j, daca presupunem ca curentul prin condensator (tensiunea la bornele bobinei) este marginit, atunci conform proprietatii de continuitate $u_c(t_j-\varepsilon)=u_c(t_j+\varepsilon)\left[(i_L(t_j-\varepsilon)=i_L(t_j+\varepsilon)\right]$. Aceasta proprietate permite determinarea starii initiale $x(t_j+\varepsilon)$ ca fiind egala cu valoarea $x(t_j-\varepsilon)$ determinata in analiza pe intervalul $[t_{j-1},t_j]$.

Exemplu:

Fie circuitul din figura *a* cu *e(t)* ca in figura *b*.



Daca $\Delta\to 0$ atunci $e(t)\to\delta(t)$ (impulsul Dirac unitar).

Calculand raspunsul $u_{C_\Delta}(t)$ la excitatia $e_\Delta(t)$ vom obtine pentru $\Delta\to 0$ raspunsul la $\delta(t)$. Presupunand starea initiala nula $u_C(0_-)=0$, rezulta $u_C(0_+)=0$.

Pentru intervalul $[0,\Delta]$ $u_C(0)=0$ $t_\infty=+\infty$ $u_C(t_\infty)=\dfrac{1}{\Delta}$ *si* $u_{C_\Delta}(t)=\dfrac{1}{\Delta}-\dfrac{e^{-\frac{t}{\delta}}}{\Delta}$. Deci

$$u_{C_\Delta}(\Delta)=\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{2}}}{\Delta}.$$

Pentru intervalul $[\Delta,+\infty]$ starea initiala este $u_{c\Delta}(\Delta) si u_{c\Delta}(t_\infty)=0$. Rezulta $u_{C_\Delta}(t)=\dfrac{1-e^{-\frac{\Delta}{\delta}}}{\Delta}e^{-\frac{t-\Delta}{\delta}}$.

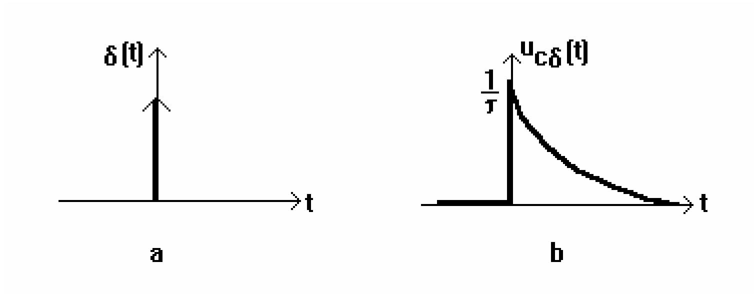
Daca $\Delta\to 0$ obtinem raspunsul la impulsul Dirac unitar

$$u_{c\delta}(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}{\Delta}e^{-\frac{t-\Delta}{\tau}}=e^{-\frac{t}{\tau}}\lim_{\Delta\to 0}\frac{\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}}{1}=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pentru intervalul $[\Delta,+\infty]$ starea initiala este $u_C(\Delta)$ *si* $u_C(t_\infty)=0$. Rezulta:

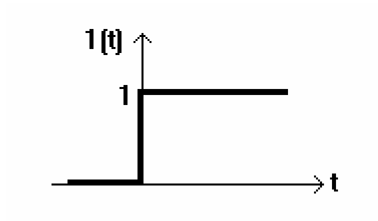
$u_{C_\Delta}(t)=\dfrac{1-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}{\Delta}e^{-\frac{t-\Delta}{\tau}}$. Daca $\Delta\to 0$ obtinem raspunsul la impulsul Dirac unitar:

$u_{c\delta}(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{1-e^{-\frac{\Delta}{\tau}}}{\Delta}e^{-\frac{t-\Delta}{\tau}}=e^{-\frac{t}{\tau}}\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{\frac{1}{\tau}e^{-\frac{4}{\tau}}}{1}=\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ unde am folosit regula lui l'Hospital.



Excitatia si raspunsul sunt date in figurile a si b. Excitatia $\delta(t)$ joaca un rol important in analiza circuitelor (vezi capitolul 7).

O alta forma remarcabila a excitatiei este treapta unitate 1(t)



Raspunsul acestui circuit la treapta unitate se obitne considerand $u_{c_\Delta}(t)$ pe intervalul $[0,\Delta]$ pentru $\Delta = 1$ adica $u_{c1}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$. Se observa ca $u_{c\delta}(t) = (u_{c1}(t))'$, deci raspunsul la impuls Dirac unitar se obtine prin derivarea in raport cu timpul a raspunsului la treapta unitate. Se poate demonstra (vezi capitolul 7) ca aceasta proprietate este valabila pentru orice circuit liniar cu stare initiala nula.

3.3.4. Circuite liniare cu surse variabile in timp

Un circuit liniar de ordinul intai cu surse independente variabile in timp are un generator echivalent de tensiune si/sau de curent cu e(t) sau $i_s(t)$ de forma arbitrara. Variabila de stare satisface ecuatia $\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\tau} + \frac{s(t)}{\tau}$ unde s(t) este e(t) sau $i_s(t)$. Fiind data o stare initiala $x(t_0)$ solutia ecuatiei este: $x(t) = x(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} s(t')dt'$.

Daca $t=t_0$ rezulta $x(t)=x(t_0)$. Daca $t>t_0$ se poate arata ca solutia verifica ecuatia circuitului. Intr-adevar:

$$\dot{x}(t) = -\frac{x(t_0)}{\tau} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{t'}{\tau}} s(t')dt'\right]' = -\frac{x(t_0)}{\tau} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{t'}{\tau}} \cdot s(t')dt' + \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{\frac{t}{\tau}}}{\tau} \cdot s(t).$$

(Am folosit relatia $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(t')dt' = f(t)$). Evident $\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\tau} + \frac{s(t)}{\tau}$.

Raspunsul circuitului contine doi termeni:

$x(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ care se obtine pentru s(t)=0 si se numeste *raspunsul la excitatie nula.*

$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} s(t')dt'$ care se obtine pentru $x(t_0) = 0$ si se numeste *raspunsul la stare initiala nula.*

Observatii

i) raspunsul complet poate fi considerat ca superpozitia a doua raspunsuri: raspunsul la excitatie nula care depinde numai de starea initiala si raspunsul la stare initiala nula care depinde numai de excitatie

ii) in cazul unui circuit cu $\tau > 0$ pentru valori ale lui t' astfel incat $t - t' >> \tau$ factorul $e^{-\frac{t-t'}{\tau}}$ este foarte mic; rezulta ca valorile excitatiei la momente anterioare lui t cu mai mult de 5τ nu influienteaza raspunsul la momentul t adica circuitul memoreaza practic numai ultimele 5 constante de timp din evolutia sa

iii) in cazul unui circuit cu $\tau < 0$ influenta valorilor excitatiei s(t') este cu atat mai mare cu cat momentul t' este mai indepartat de momentul t in care se calculeaza raspunsul

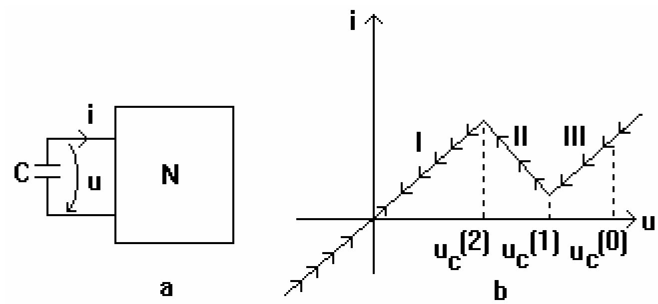
iv) deoarece raspunsul la impuls Dirac unitar este $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ (vezi paragraful 3.3.3.) rezulta ca raspunsul la stare initiala nula se poate scrie $\int_{t_0}^{t} h(t-t')s(t')dt'$.

3.3.5. Circuite liniare cu comutatoare

Presupunem ca circuitul rezistiv contine comutatoare a caror stare [inchis (R=0) sau deschis (R=∞)] este specificata pentru orice t ≥ t_0. Considerand fiecare interval de timp in care starea tuturor comutatoarelor ramane neschimbata, analiza unui astfel de circuit se poate face ca in paragraful 3.3.3., eventual utilizand pe fiecare interval rezultatul obtinut in paragraful 3.3.4. Evident, prin modificarea starii comutatoarelor se modifica si constanta de timp a circuitului.

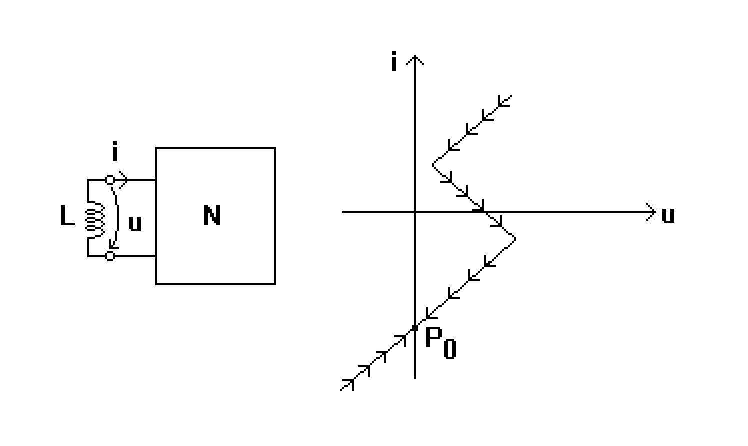
3.3.6. Circuite cu rezistoare liniare pe portiuni

Fie un circuit cu elemente invariante in timp care contine rezistoare liniare pe portiuni. Ca urmare, caracteristica tensiune-curent a partii rezistive (conectate la bornele elementului dinamic)



va fi liniara pe portiuni. De exemplu, in circuitul din figura a, N are carcteristica din figura b. u(t) si i(t) iau valori astfel incat punctul de coordonate [u(t), i(t)] se deplaseaza pe caracteristica din figura b plecand din $u_c(0)$ astfel incat sa fie satisfacuta ecuatia $-i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$. Avand in vedere ca deplasarea se face pe portiunile liniare ale caracteristicii lui N, pentru fiecare portiune se pot folosi metodele prezentate anterior. Din ecuatia de functionare a condensatorului rezulta $\dot{u} = -\dfrac{i}{C}$ deci daca $i > 0 \quad \dot{u} < 0$ deci valorile lui u scad, iar daca $i < 0 \quad \dot{u} > 0$ deci valorile lui u cresc. Aceasta inseamna ca deplasarea punctului de functionare pe caracteristica din figura b se poate face numai in sensul sagetilor. Pentru o conditie initiala data punctul de functionare se deplaseaza pe o anumita portiune a caracteristicii lui N pana in *punctul de echilibru* care este, in acest caz, originea $(\dot{u} = 0 \Rightarrow u = 0, i = 0)$. Aceasta portiune a caracteristicii parcursa de punctul de functionare se numeste *parcurs dinamic.* Analiza acestui circuit se face initial pentru portiunea liniara III a caracteristicii (intre $u_C = u_C^{(0)}$ si $u_C = u_C^{(1)}$), apoi pentru portiunea II (intre $u_C = u_C^{(1)}$ si $u_C = u_C^{(2)}$), si in final pe portiunea I cu starea initiala $u_c^{(2)}$. Pe fiecare portiune liniara circuitul neliniar are cate un circuit echivalent liniar. Se remarca faptul ca pentru portiunea II circuitul echivalent liniar are un rezistor cu R<0 deci $\tau < 0$, in timp ce pe portiunile III si I $\tau > 0$.

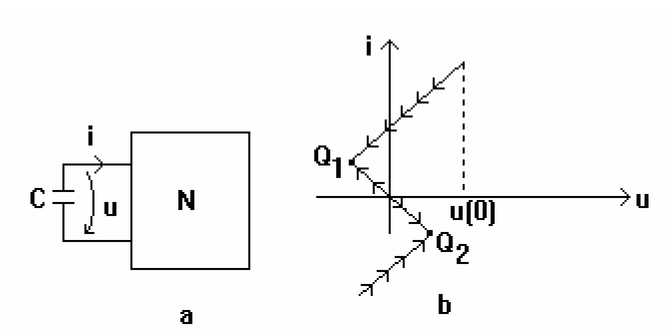
Similar se poate analiza un circuit cu bobina si rezistor liniar pe portiuni controlat in curent. Parcursul dinamic se poate determina din ecuatia $\dot{i}(t) = -\frac{1}{L}u(t)$ deci daca u>0, i creste iar daca u<0, i scade. Punctul de echilibru P_0 se gaseste pe axa u=0 (*di/dt =0* $\Rightarrow$ *u=0)*, spre deosebire de



circuitul cu condensator unde acesta va fi plasat obligatoriu pe axa i=0.

Observatii:

i) un circuit format dintr-un condensator si un rezistor liniar pe portiuni care nu este controlat in tensiune poate avea o comportare speciala; fie circuitul din figura a al carui parcurs dinamic este dat in figura b.



Daca circuitul pleaca din starea initiala u(0) si punctul de functionare ajunge in Q_1 circuitul nu mai poate evolua in continuare. Un astfel de punct (cum este si Q_2) se numeste *punct de impas.*

ii) observatii similare se pot face si pentru circuitele cu bobina liniara si rezistor care nu este controlat in curent.

iii) circuitele de ordinul intai cu rezistoare liniare pe portiuni folosesc la realizarea oscilatoarelor de relaxare, multivibratoarelor, bazelor de timp, etc.