

6. Circuite liniare în regim periodic nesinusoidal

6.1 Introducere. Analiza armonica a semnalelor

Pâna în prezent am studiat comportarea circuitelor liniare dacă excitația este sinusoidală. În realitate tensiunile și curenții printr-o rețea electrică sunt diferiți de forma sinusoidală. Abaterea acestora de la forma sinusoidală se numește distorsiune sau deformare.

Un astfel de exemplu îl constituie bobina neliniară (cu miez de fier) careia dacă i se aplică o tensiune sinusoidală (excitație) răspunsul acesteia (curentul) este nesinusoidal.

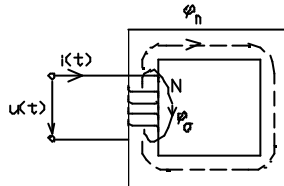


Fig. 6.1

Presupunând o bobină cu miez de fier (fig.6.1) alimentată de la o sursă de tensiune sinusoidală $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ rezultă ecuația în tensiune a bobinei cu miez de fier prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff:

$$R_b i - u = -\frac{d\Phi_l}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_\sigma + \Phi_u) = -L_\sigma \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi_u}{dt},$$

unde: $-L_\sigma \frac{di}{dt}$ este fluxul de dispersie cu o dependență liniară față de curentul din circuit ($L_\sigma \sim \mu_0$). Dependența flux-curent $\Phi_u(i)$ este neliniară datorată prezentei circuitului feromagnetic al bobinei iar ecuației în tensiune a bobinei cu miez de fier îi corespunde următoarea schemă echivalentă:

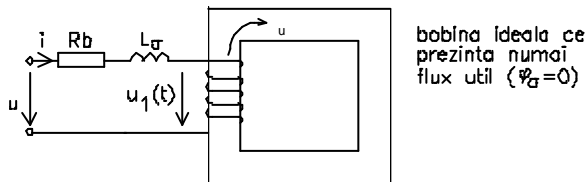


Fig. 6.2

$$u = R_b i + L_\sigma \frac{di}{dt} + N \frac{d\Phi_u}{dt} \quad u_1(t) = N \frac{d\Phi_u}{dt}$$

Considerând ca bobina are R_b și L_σ neglijabile (fapt apropiat de realitate) atunci tensiunea de alimentare $u = u_1(t) = N \frac{d\phi_u}{dt}$.

Din relația de mai sus se poate determina forma de variație a fluxului magnetic

$$\phi_u = \frac{1}{N} \int u(t) dt = \frac{1}{N} \int \sqrt{2} U \sin \omega t = \frac{\sqrt{2} U}{\omega N} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \Phi_{\max} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Fluxul magnetic util (în miezul feromagnetic) este sinusoidal și se afla în urma tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$. Forma de variație a curentului ce parcurge bobina este funcție de dependența $\Phi_u = f(i)$ a materialului feromagnetic care la alta scară, (vezi legile câmpului electromagnetic), reprezintă dependența $B = f(H) \left(\Phi_{s_r} = \iint_{S_r} \vec{B} d\vec{A}, \oint_{\Gamma} \vec{H} di = Ni \right)$.

Pentru materialele feromagnetice moi cu dependența flux – curent (fig.6.3) atât timp cât se lucrează cu tensiuni mici fluxul magnetic are punctul maxim de funcționare numai în zona liniară (OM) iar curentul este sinusoidal.

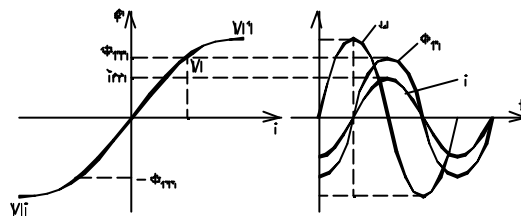


Fig. 6.3.

Dacă punctul de funcționare ajunge în zona de saturație fluxul magnetic rămâne sinusoidal, iar curentul are forma nesinusoidală prezentată în fig.6.4

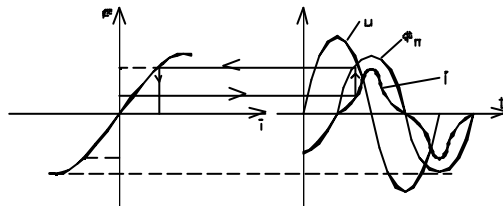


Fig. 6.4. Construcția grafică a formei de variație a curentului.

La un moment t dat (fig.6.4.b) bobinei îi corespunde un flux ϕ caruia în caracteristica $\phi = \phi(i)$ îi corespunde curentul i . Valoarea acestui curent se rabatează pe verticală, iar în dependența acestuia funcție de timp, corespunde valorii curentului la momentul de timp t dat.

Pentru materialele feromagnetice ce prezintă *ciclu de histeresis* (dure) curentul este deformat și nu mai este în fază cu fluxul (fig.6.5).

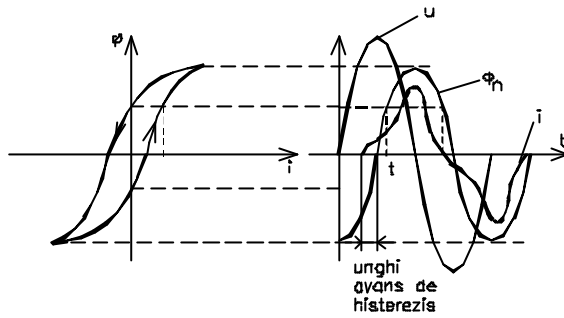


Fig. 6.5.

La $\varphi_u=0$ curentul este impus de H_c iar pentru anularea fluxului remanent Φ_{rem} curentul are o valoare diferita de zero .

Construcția grafică a formei de variație a curentului

- la momentul t_1 oarecare pe curba de crestere a fluxului \dot{i} corespunde un curent
- la momentul t_2 la același flux magnetic pe curba descendentă a caracteristicii flux curent curentul este nul iar fluxul pozitiv egal cu valoarea remanentă

Pentru acest ultim caz ecuația în tensiune a bobinei cu miez de fier este

$$u = R_b i + L_\sigma \frac{di}{dt} + u_1 \quad \text{cu} \quad u_1(t) = N \frac{d\Phi_u}{dt} - \text{t.e.m. de autoinducție.}$$

Reprezentând ecuația de mai sus în complex simplificat, prin alegerea fluxului magnetic în axa reală, rezulta diagrama de fazori (fig.6.6) și schema echivalentă (fig.6.7):

$$\underline{U} = R_b \underline{I} + jX_\sigma \underline{I} + \underline{U}_1 \quad \text{unde} \quad \underline{U}_1 = j\omega \frac{\Phi_m}{\sqrt{2}}$$

Bilantul de puteri al bobinei se obține prin amplificarea ecuației de mai sus cu valoarea complex conjugată a curentului rezultând:

$$\underline{U} \underline{I}^* = R_b I^2 + jX_\sigma I^2 + \underline{U}_1 \underline{I}^* \text{ iar prin separarea părții reale și imaginare}$$

$$P = UI \cos \varphi = R_b I^2 + \text{Re}\{\underline{U}_1 \underline{I}^*\} = P_J + P_H$$

$$Q = UI \sin \varphi = Q_\sigma + Q_H$$

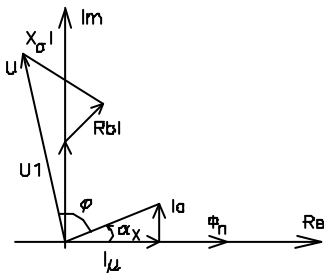


Fig. 6.6

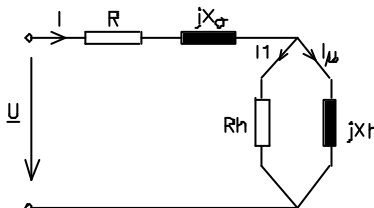


Fig. 6.7

Excitând o bobina cu miez de fier de la o sursa de curent sinusoidală, tensiunea la bornele bobinei este nesinusoidală.

6.2. Analiza armonică a funcțiilor periodice

Orice funcție periodică $y(t)=y(t+nT)$ ce îndeplinește condițiile Dirichlet (marginată, netedă pe porțiuni, număr finit de discontinuități $\int |y| dt < \infty$) poate fi reprezentată (admite o dezvoltare) printr-o *serie trigonometrică denumită serie Fourier* de forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$$

unde A_0 – componenta continuă a funcției

A_k – valoarea efectivă a armonicilor de ordinul k

γ_k – faza inițială a armonicilor de ordin k .

Altfel spus orice funcție periodică nesinusoidală este o sumă de funcții sinusoidale de pulsații diferite ($k=1 \dots \infty$).

Alte forme ale seriei Fourier se obțin din dezvoltarea funcției $\sin(k\omega t + \gamma_k)$ și anume

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} (A_k \sin k\omega t \cos \gamma_k + A_k \sin \gamma_k \cos k\omega t)$$

Notând $B_k = A_k \cos \gamma_k$ iar $C_k = A_k \sin \gamma_k$ rezulta $\operatorname{tg} \gamma_k = -\frac{C_k}{B_k} \Rightarrow \gamma_k = \operatorname{arctg} \frac{C_k}{B_k}$, respectiv

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \quad \text{sau} \quad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{B_k}{C_k}$$

Determinarea coeficienților seriei Fourier se face din dezvoltarea

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \cos k\omega t$$

Integrând seria Fourier pe durata unei perioade $y(t)$ se determină componenta continuă:

$$\int_0^T y(t) dt = \int_0^T A_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} B_k \underbrace{\int_0^T \sin k\omega t dt}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} C_k \underbrace{\int_0^T \cos k\omega t dt}_{=0}$$

rezultând $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$

Valorile efective ale fundamentalei și armonicilor seriei Fourier se pot determina prin înmulțirea cu $\sin k\omega t$ sau $\cos k\omega t$ a funcției nesinusoidale și integrarea pe durata unei perioade

$$\int_0^T y(\tau) \sin k\omega\tau \, d\tau = A_0 \int_0^T \sin k\omega\tau \, d\tau + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} \int_0^T B_k \underbrace{\sin^2 k\omega\tau}_{\frac{1-\cos 2k\omega\tau}{2}} \, d\tau + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} \int_0^T C_k \underbrace{\sin k\omega\tau \cos k\omega\tau}_{\sin 2k\omega\tau = 0} \, d\tau$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}B_k \frac{T}{2} = \int_0^T y(t) \sin k\omega t \, dt \quad \text{respectiv} \quad \sqrt{2}C_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t \, dt$$

Forma complexa a seriei trigonometrice se obtine din forma complexa a functiilor trigonometrice $\sin k\omega t = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t})$ respectiv $\cos k\omega t = \frac{1}{2}(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t})$

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \cdot \frac{1}{2j}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \frac{1}{2}(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k}{2} + \frac{B_k}{2j} \right) e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k}{2} - \frac{B_k}{2j} \right) e^{-jk\omega t}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k - jB_k}{2} \right) e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \left(\frac{C_k + jB_k}{2} \right) e^{-jk\omega t}$$

Daca însumarea se face dupa -k în ultimul termen al expresiei de mai sus atunci:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \sqrt{2} \left(\frac{C_k - jB_k}{2} \right) e^{jk\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \sqrt{2} \left(\frac{C_k + jB_k}{2} \right) e^{-jk\omega t}$$

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_k \cdot e^{jk\omega t}$$

unde: $A_0 = \Phi_0$; $\Phi_k = \frac{C_k - jB_k}{2} = \frac{1}{2} A_k e^{-j \arctg \frac{B_k}{C_k}} = \frac{1}{2} A_k e^{-j\varphi_k}$.

Aceiasi forma complexa a seriei Fourier rezulta si din înlocuirea coeficientilor:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

$$\sqrt{2}B_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin k\omega t \, dt$$

$$\sqrt{2}C_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t \, dt$$

În expresia functiei f(t):

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \, d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \sin k\omega\tau \sin k\omega t \, d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \cos k\omega\tau \cos k\omega t \, d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\sin k\omega\tau \sin k\omega t + \cos k\omega\tau \cos k\omega t) \right] \, d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega(t-\tau)}{e^{jk\omega(t-\tau)} + e^{-jk\omega(t-\tau)}} \right] \, d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{jk\omega(t-\tau)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-jk\omega(t-\tau)} \right] d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega(t-\tau)} d\tau = \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau \right)}_{\Phi_k(jk\omega)} \cdot e^{jk\omega t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \underline{\Phi}_k \cdot e^{jk\omega t}, \text{ unde } \underline{\Phi}_k = \Phi_k(jk\omega) \cdot e^{-j\phi_k} = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau$$

Funcția $\underline{\Phi}_k$ este o funcție de variabilă complexă cu modulul dependent de frecvența denumit amplitudine spectrală dar funcția Φ_k are și argumentul dependent de frecvența.

Reprezentarea funcției de frecvență $\Phi_k = \Phi_k(k\omega)$ a modulului conduce la definirea spectrului de frecvență al amplitudinilor (spectrul discret) iar reprezentarea argumentului $\phi_k = \phi_k(k\omega)$ conduce la spectrul de frecvență al fazelor inițiale

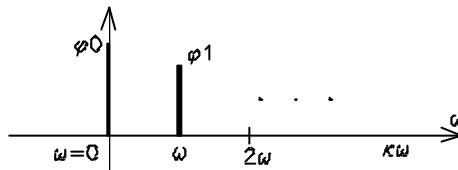


Fig. 6.8

Concluzie:

Orice semnal periodic este o sumă de semnale complexe (combinație liniară).

Astfel funcția $x(t) = X_m \cos \omega t$ provine din $x(t) = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{x}^*)$ cu:

$$\underline{x} = x_m e^{j\omega t} = x_m (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$\underline{x}^* = x_m e^{-j\omega t} = x_m (\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

6.3. Exemple de semnale periodice particulare

a) Semnale pare satisfac ecuația $y(t) = y(-t) = y(T-t)$

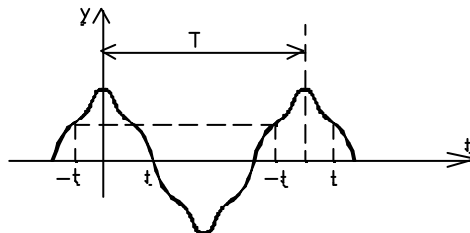


Fig. 6.9

Seria Fourier devine:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t$$

$$y(-t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega(-t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega(-t) \text{ iar prin impunerea conditiei de}$$

functie para:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t = A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t$$

rezulta: $B_k=0$

Dezvoltarea în serie a functiei pare este: $y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t$, unde:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) d\tau \quad ; \quad \sqrt{2}C_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \cos k\omega\tau d\tau, \quad \text{sau:} \quad y(t) = \sum_0^{\infty} \underline{\Phi}_k \cdot e^{jk\omega t} \quad \text{cu:}$$

$$\underline{\Phi}_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) (\cos k\omega\tau - j \sin k\omega\tau) d\tau \text{ având numai parte reala}$$

(vezi reprezentarea complexa a marimilor sinusoidale trecute din cosinus).

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}A_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \text{ fiind para para } n=2k.$$

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_{2k} \sin(2k\omega t + \gamma_{2k})$$

b) Semnalele impare satisfac relatia $y(t) = -y(-t) = -y(T-t)$

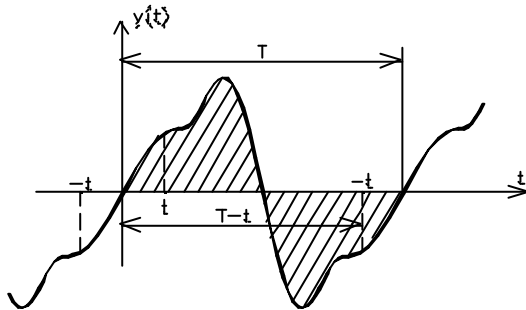


Fig. 6.10

Impunând conditia de semnal impar $y(t) = -y(-t) \Rightarrow$ rezulta:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega t = - \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\omega(-t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}C_k \cos k\omega(-t) \right]$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \cos k\omega t$$

cu: $\sqrt{2}B_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(\tau) \sin k\omega\tau d\tau$ sau seria complexa: $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{\Phi}_k \cdot e^{jk\omega t}$

unde: $\Phi_k = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) (\cos k\omega\tau - j \sin k\omega\tau) d\tau$, dar:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} A_n \sin(n\omega t + \gamma_n), \quad n=2k+1$$

$$\Rightarrow y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_{2k+1} \sin((2k+1)\omega t + \gamma_{2k+1})$$

6.4. Valori caracteristice ale semnalelor periodice nesinusoidale

a) Valoarea efectiva. Fie $y_1(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$. Conform definitiei

valoarea efectiva Y a unui semnal $y(t)$ este:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt}$$

$$y^2 = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \right)^2 = A_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_0 A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \right]^2$$

$$y^2 = A_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \sin^2(k\omega t + \gamma_k) + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_p A_q \sin(p\omega t + \gamma_p) \sin(q\omega t + \gamma_q) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} A_0 A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt &= \frac{1}{T} A_0^2 \int_0^T dt + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \int_0^T \underbrace{\sin^2(k\omega t + \gamma_k)}_{\frac{1}{2}} dt + \frac{2}{T} \sum_p \sum_{\substack{q \\ p \neq q}} A_p A_q \int_0^T \underbrace{\sin(p\omega t + \gamma_p) \sin(q\omega t + \gamma_q)}_{=0} dt \\ &+ \frac{2\sqrt{2}A_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^T \underbrace{\sin(k\omega t + \gamma_k)}_{=0} dt \end{aligned}$$

Introducând simbolul $\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$ și deoarece:

$$\int_0^T \sin(p\omega t + \gamma_p) \sin(q\omega t + \gamma_q) dt = \frac{1}{2} \delta_{pq} \cos(\gamma_p - \gamma_q)$$

rezulta:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}$$

$$Y = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2} = \sqrt{A_0^2 + A^2 + A_d^2}$$

unde:

- $Y_d = \sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2}$ se numeste reziduul deformant.

Definim în regim sinusoidal si nesinusoidal urmatoorii factori:

Regim sinusoidal	Regim nesinusoidal
- de amplitudine (vârf) $K_v = \frac{Y_{\max}}{Y} = \frac{\max}{\text{efectiva}} = \sqrt{2}$	$K_v = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{Y^2 - Y_0^2}}$
- de forma $K_f = \frac{Y}{Y_{\text{medT/2}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$K_f = \frac{Y}{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} y(t) dt}$

Pentru regimul nesinusoidal se defineste $K_d = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} Y_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2}} = \frac{Y_d}{\sqrt{Y^2 - Y_0^2}} \in (0,1)$ si se

numeste factor de distorsiune.

6.5. Puteri ale circuitelor liniare în regim permanent nesinusoidal

Daca unui dipol i se aplica o tensiune nesinusoidală si un curent nesinusoidal rezulta ca absoarbe o putere instantanee egala cu produsul $u \cdot i = p$.

Daca $u(t) = U_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk})$ iar $i(t) = I_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik})$

expresia puterii instantanee va fi:

$$p = u \cdot i = U_0 I_0 + \sqrt{2} U_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik}) + \sqrt{2} I_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) + 2 \sum_{p=1} \sum_{q=1} U_p I_q \sin(p\omega t + \gamma_{pu}) \sin(q\omega t + \gamma_{qi})$$

a) Puterea activa reprezinta valoarea medie a puterii conform relatiei

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} U_0 I_0 \int_0^T dt + \frac{\sqrt{2} U_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{ik}) dt + \frac{\sqrt{2} I_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \int_0^T \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) dt + \frac{2}{T} \sum_q \sum_p U_p I_q \int_0^T \underbrace{\sin(p\omega t + \gamma_{pu}) \sin(q\omega t + \gamma_{qi})}_{\frac{1}{2} \delta_{pq} \cos(\gamma_{up} - \gamma_{iq})} dt$$

p=q exista integrala

Rezulta astfel : $P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$ sau

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots + U_n I_n \cos \varphi_n$$

în care φ_k este defazajul dintre armonicile de tensiune si curent.

b) Puterea reactiva (prin simetrie) Q este egala cu suma puterilor reactive ale armonicilor.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \text{ - suma puterilor reactive corespunzatoare tuturor armonicilor}$$

c) Puterea aparenta S se defineste prin produsul valorilor efective ale tensiunii U si curentului I

$$S = U \cdot I \text{ - produs valori efective cu } U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_d^2}, \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_d^2}$$

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} \quad \text{In regim nesinusoidal patratul puterii aparente nu}$$

este egal cu suma patratelor puterilor activa si reactiva ci

$$S^2 = U^2 \cdot I^2 = U_0^2 I_0^2 + U_0^2 I_1^2 + U_0^2 I_d^2 + U_1^2 I_0^2 + U_1^2 I_1^2 + U_1^2 I_d^2 + \dots$$

$$\Rightarrow S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (U_p^2 I_q^2 + U_q^2 I_p^2 - 2U_p U_q I_p I_q \cos(\varphi_p - \varphi_q))}$$

cu: $\varphi_p = \gamma_{up} - \gamma_{ip}, \quad \varphi_q = \gamma_{uq} - \gamma_{iq}$.

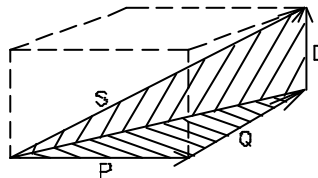


Fig. 6.11

$$\xi = \angle(S_1 \text{ si } S); \quad \varphi = \angle(S_1 \text{ si } P)$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S_1}, \quad \cos \xi = \frac{S_1}{S}$$

Factorul de putere în regim nesinusoidal se definește la fel ca în regim sinusoidal $K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} = \frac{P}{S} \cdot \frac{S_1}{S_1} = \frac{P}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S} = \cos\varphi \cos\xi$; $K = \cos\varphi \cos\xi < \cos\varphi = K_p$.

$$\text{Deoarece } D = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (U_p^2 I_q^2 + U_q^2 I_p^2 - 2U_p U_q I_p I_q \cos(\varphi_p - \varphi_q))}$$

$$\text{și în cazul rezonanței pe toate armonicile } \Rightarrow D = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_p \sum_q (U_p I_q - U_q I_p)^2}$$

nu se anulează puterea deformantă. Pentru ca puterea deformantă D să fie nulă, trebuie

ca $\frac{U_p}{I_p} = \frac{U_q}{I_q} = \text{ct.}$. Deci $U_p I_q = U_q I_p$ și $\varphi_p = \varphi_q$, condiție ce implică rezonanța pe toate

armonicile cu amplitudini proporționale.

6.6. Elemente liniare de circuit în regim nesinusoidal

1. Rezistorul. Se consideră un rezistor R la bornele cărui se aplică tensiunea

$$u(t) = U_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) \text{ având componenta continuă nenulă și}$$

coeficientul de distorsiune k_u

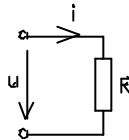


Fig. 6.12

Aplicând relația Ohm se determină curentul și coeficientul de distorsiune al acestuia k_i :

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k}{R} \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) = I_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik})$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{R}, \quad I_k = \frac{U_k}{R}, \quad \varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = 0$$

Concluzie: Rezistorul nu modifică forma curentului față de a tensiunii.

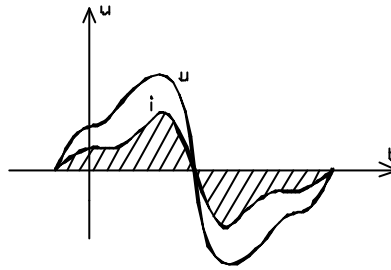


Fig. 6.13

$$- K_{di} = K_{du} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}}$$

- puterea absorbita $P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = R \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = RI^2$.

2 **Bobina ideala** (fata de componenta continua U_0 bobina ideala se comporta ca un scurtcircuit)

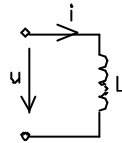


Fig. 6.14

Din ecuatia $u_L = L \frac{di}{dt}$, deci $i = \frac{1}{L} \int u_L$ se deduce intensitatea curentului

$$i = \frac{1}{L} \int \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk}) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{U_k}{k\omega L} \sin(k\omega t + \gamma_{uk} - \pi/2)$$

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \gamma_i)$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{U_k}{k\omega L}, \quad \varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = \pi/2, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = 0 \text{ (reduce gradul de deformare)}$$

- coeficientul de distorsiune al tensiunii $K_{du} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}}$ iar al curentului

$$K_{id} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k\omega L}\right)^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k\omega L}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{U_k^2}{k^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{k^2}}} < K_{du}$$

Bobina ideala reduce gradul de deformare al curentului fata de cel al tensiunii.

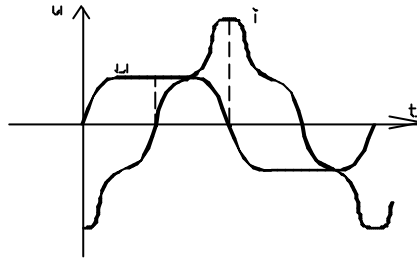


Fig. 6.15

- puteri ale bobinei ideale

$$P=0$$

$$S = \sqrt{Q^2 + D^2}$$

$$Q = \sum_{k=1} U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_{k=1} (k\omega L) I_k^2 > 0$$

3. Condensatorul ideal

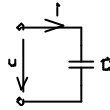


Fig. 6.16

Din ecuatia $i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} k\omega C U_k \sin(k\omega t + \gamma_{uk} + \pi/2) = \sqrt{2} \sum_{k=1} I_k \sin(k\omega t + \gamma_{ik})$

rezulta: $I_0 = 0$, $I_k = k\omega C U_k$, $\varphi_k = \gamma_{uk} - \gamma_{ik} = -\pi/2$.

$$K_{di} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2} I_k^2}{\sum_{k=1} I_k^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2} (k\omega C U_k)^2}{\sum_{k=1} (k\omega C U_k)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2} (k U_k)^2}{\sum_{k=1} (k U_k)^2}} > K_{du}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k \rightarrow \infty \Rightarrow$ Armonicile de curent contribuie la modificarea pronuntata a formei

curentului fata de a tensiunii.

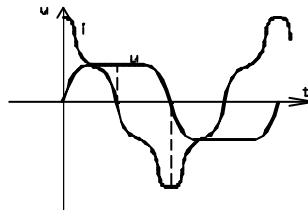


Fig. 6.17

$$S = \sqrt{Q^2 + D^2}$$

6.7. Analiza circuitelor în regim nesinusoidal

În regim nesinusoidal curentii $i_k(t)$ și tensiunile $u_k(t)$ fiind funcții periodice de timp, admit dezvoltări în serie Fourier și notând I_{kn} respectiv U_{kn} armonicile de ordinul n ecuațiile Kirchhoff se scriu astfel utilizând teorema superpoziției.

$$\underline{\text{T1K}} \quad i = \sum_{n \in (s)} i_n = \sum_{n \in (s)} I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_{nk}(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n \in (s)} I_0 = 0 - \text{T1K pentru valori continui} \\ \sum_{n \in (s)} i_{k1} = 0 - \text{pentru fundamentala} \\ \sum_{n \in (s)} i_{k2} = 0 - \text{pentru armonica de ordin 2} \end{cases}$$

$$\underline{\text{T2K}} \quad \sum_{j \in (m)} U_j = 0 \Rightarrow \sum_{j \in (m)} (U_{0j} + \sum U_{jk}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j \in (m)} U_{0j} = 0 - \text{soma tensiunilor la borne pentru } j \in (m) = 0 \\ \sum_{j \in (m)} U_{1j} = 0 - \text{pentru fundamentala} \\ \sum_{j \in (m)} U_{2j} = 0 - \text{pentru armonica de ordin 2} \end{cases}$$

Se considera, spre exemplificare, următorul circuit alimentat cu $u=80\sin\omega t+60\sin3\omega t$, $f=50\text{Hz}$. Dacă $r=2\Omega$, $L=\frac{20}{\pi}\text{mH}$, $C=\frac{5}{\pi}\text{mF}$ să se determine valorile instantanee ale curentilor, P , S , Q , și D .

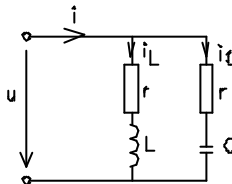


Fig. 6.18

Rezolvare:

Aplicăm teorema superpoziției și cele două teoreme Kirchhoff pentru rezolvare.

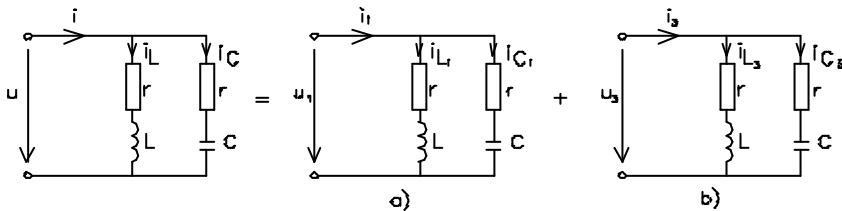


Fig. 6.19

$$u = u_1 + u_3 = 80\sin\omega t + 60\sin3\omega t$$

a) Pentru fundamentala $u_1 = 80\sin\omega t$,

$$\underline{Z}_{L1} = r + j\omega L = 2 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \frac{20}{\pi} \cdot 10^{-3} = 2 + 2j = 2,8e^{j\pi/4}$$

$$\underline{Z}_{C1} = r - j \frac{1}{\omega C} = 2 - j \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot \frac{5}{\pi} \cdot 10^{-3}} = 2 - 2j = 2,8e^{-j\pi/4}$$

Curenti prin bobina si condensator sunt:

$$\underline{I}_{-L1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{-L1}} = \frac{\frac{80}{\sqrt{2}}}{2,8e^{j\pi/4}} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 2,8} e^{-j\pi/4}$$

$$\underline{I}_{-C1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{\frac{80}{\sqrt{2}}}{2,8e^{-j\pi/4}} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 2,8} e^{j\pi/4}$$

Curentul total este dat de expresia:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{e1}} \text{ cu } \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{Z}_{L1} \underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{C1}} = \frac{2,8 \cdot 2,8 \cdot e^{-j\pi/4} \cdot e^{j\pi/4}}{2 + 2j + 2 - 2j} = \frac{2,8^2}{4} \equiv 2$$

$$\underline{I} = \frac{80}{\sqrt{2} \cdot 2} e^{j0} = \frac{40}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

rezultând
$$\begin{cases} i_{L1} = 28,3 \sin(\omega t - \pi/4) \\ i_{C1} = 28,3 \sin(\omega t + \pi/4) \\ i = 40 \sin \omega t \end{cases}$$

b) Pentru armonica a treia:

$$\underline{Z}_{L3} = r + j \cdot 3\omega L = 2 + 6j$$

$$\underline{Z}_{C3} = r - j \frac{1}{3\omega C} = 2 - j \frac{2}{3}$$

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_{L3} \underline{Z}_{C3}}{\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{C3}} = 2$$

$$\underline{I}_{L3} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_{L3}} = \frac{60}{\sqrt{2}(2+6j)} = 9,5 \cdot e^{-j7^\circ}$$

$$\underline{I}_{C3} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_{C3}} = \frac{60}{\sqrt{2}\left(2 - j \frac{2}{3}\right)} = 28,4 \cdot e^{-j18^\circ}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{e3}} = \frac{60}{\sqrt{2} \cdot 2} e^{j0}$$

$$i_{L3} = \text{Im}\left\{\underline{I}_{L3} \cdot e^{j3\omega t} \sqrt{2}\right\}$$

$$i_{C3} = \text{Im}\left\{\underline{I}_{C3} \cdot e^{j3\omega t} \sqrt{2}\right\}$$

$$i_3 = \text{Im}\left\{\underline{I} \cdot e^{j3\omega t} \sqrt{2}\right\}$$

Puterile sunt exprimate prin relatiile:

$$S = U \cdot I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{80^2 + 60^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{40^2 + 30^2} = 2500 \text{VA}$$

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot 8040 \cos 0 + \frac{11}{2} \cdot 60 \cdot 30 \cos 0 = 2500 \text{W}$$

$$Q=0; D=0$$

6.8. Circuite liniare trifazate sub tensiuni simetrice nesinusoidale

Un sistem de trei marimi periodice y_1, y_2, y_3 alcătuiesc un sistem trifazat simetric de succesiune directă, dacă mărimea y_2 rezulta din mărimea y_1 cu o întârziere de o treime de perioadă și mărimea y_3 rezulta din mărimea y_1 cu o întârziere de două treimi de perioadă.

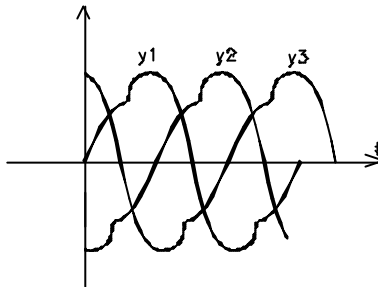


Fig. 6.20

Presupunând sistemul trifazat simetric de tensiuni nesinusoidale:

$$\begin{cases} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y\left(t - \frac{T}{3}\right) \\ y_3(t) = y\left(t - \frac{T}{3} - \frac{T}{3}\right) = y\left(t - \frac{2T}{3}\right) \end{cases}$$

Dezvoltările în serie Fourier ale marimilor y_1, y_2 și y_3 sunt:

$$y_1(t) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2} Y_n \sin(n\omega t + \gamma_n)$$

$$y_2(t) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2} Y_n \sin\left(n\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \gamma_n\right) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2} Y_n \sin\left(n\omega t + \gamma_n - n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$y_3(t) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2} Y_n \sin\left(n\omega\left(t - \frac{2T}{3}\right) + \gamma_n\right) = \sum_1^{\infty} \sqrt{2} Y_n \sin\left(n\omega t + \gamma_n - n \cdot \frac{4\pi}{3}\right)$$

și pun în evidența proprietățile:

1. pentru armonicile de ordin $n=3k$

$$y_{1,3k} = \sqrt{2}Y_{3k} \sin(3k\omega t + \gamma_{3k})$$

$$y_{2,3k} = \sqrt{2}Y_{3k} \sin\left(3k\omega t + \gamma_{3k} - 3k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}Y_{3k} \sin(3k\omega t + \gamma_{3k})$$

$$y_{3,3k} = \sqrt{2}Y_{3k} \sin\left(3k\omega t + \gamma_{3k} - 3k \cdot \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}Y_{3k} \sin(3k\omega t + \gamma_{3k})$$

marimile sunt în faza și alcătuiesc sisteme omopolare

2. armonicile de ordin $n=(3k+1)$

$$y_{1,3k+1} = \sqrt{2}Y_{3k+1} \sin((3k+1)\omega t + \gamma_{3k+1})$$

$$y_{2,3k+1} = \sqrt{2}Y_{3k+1} \sin\left((3k+1)\omega t + \gamma_{3k+1} - (3k+1) \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$y_{3,3k+1} = \sqrt{2}Y_{3k+1} \sin\left((3k+1)\omega t + \gamma_{3k+1} - (3k+1) \cdot \frac{4\pi}{3}\right)$$

alcătuiesc sistem de succesiune directă.

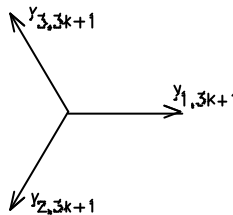


Fig. 6.21

3. armonicile de ordin $n=3k+2$ printr-un calcul similar alcătuiesc un sistem de succesiune inversă.

a) Conexiunea stea fără nul

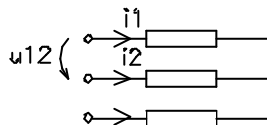


Fig. 6.22

Din relația $i_1+i_2+i_3=0$, în care:

$$i_1 = \sum_1^{\infty} (i_{1,3k} + i_{1,3k+1} + i_{1,3k+2}); \quad i_2 = \sum_1^{\infty} (i_{2,3k} + i_{2,3k+1} + i_{2,3k+2}); \quad i_3 = \sum_1^{\infty} (i_{3,3k} + i_{3,3k+1} + i_{3,3k+2})$$

rezulta:

$$0 = \underbrace{\sum (i_{1,3k} + i_{2,3k} + i_{3,3k})}_{=0} + \underbrace{\sum (i_{1,3k+1} + i_{2,3k+1} + i_{3,3k+1})}_{\sum \text{ sistem simetric direct} = 0} + \underbrace{\sum (i_{1,3k+2} + i_{2,3k+2} + i_{3,3k+2})}_{\sum \text{ sistem simetric invers} = 0}$$

Prin urmare, curentii de linie nu contin armonice multiplu de 3. În rețelele de frecvență industrială curenții și tensiunile contin numai armonicele impare, valoarea efectivă a curentului de linie are expresia $I_1 = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2}$ iar tensiunea de linie:

$$U_{12} = U_{10} - U_{20} = \sum U_{f10,3k} + U_{f10,3k+1} + U_{f10,3k+2} - \sum U_{f20,3k} + U_{f20,3k+1} + U_{f20,3k+2}$$

$$U_{12} = \sum (\underbrace{U_{f10,3k} - U_{f20,3k}}_{=0}) + \sum (\underbrace{U_{f20,3k+1} - U_{f30,3k+1}}_{=0}) + \sum (U_{f10,3k+2} - U_{f20,3k+2})$$

$$\sum (U_{12,3k+1} + U_{12,3k+2})$$

Tensiunile de linie nu contin armonici multiplu de 3. Valorile efective ale tensiunilor de fază respectiv de linie sunt: $U_f = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots}$; $U_l = \sqrt{U_{11}^2 + U_{15}^2 + \dots}$

b) Conexiunea stea cu nul

Din relația $i_1 + i_2 + i_3 = i_N$, rezulta curentul prin conductorul de nul:

$$\sum (i_{1,3k} + i_{2,3k} + i_{3,3k}) = 3 \sum i_{3k}$$

Prin urmare, conductorul de nul este parcurs de un curent care contine numai armonici multiplu de 3.

c) Conexiunea triunghi

Tensiunea în lungul laturilor triunghiului este egală cu suma tensiunilor la bornele laturilor triunghiului rezultând $U_p = 3 \sum U_{3k}$ - tensiunea interiorului triunghiului contine numai armonici de ordin 3k. Aceasta tensiune stabilește un curent de circulație care va contine numai armonici multiplu de 3. Caderile de tensiune în fiecare din laturile triunghiului fiind egale cu suma armonicilor multiplu de 3, tensiunile la bornele laturilor nu vor contine armonicile multiplu de 3. Înfasurarile alternatoarelor trifazate se conectează în stea, evitându-se conexiunea triunghi din cauza curentului de circulație ce poate încălzi înfasurarile chiar la o funcționare în gol a alternatorului. Curentul de linie egal cu diferența a doi curenți din laturile triunghiului nu contine armonici multiplu de 3.