

7. Regimul tranzitoriu al circuitelor electrice liniare

Numim regim tranzitoriu trecerea unui sistem de la o stare stabila la o alta stare stabila. Cele doua stari stabile se mai numesc si regimuri permanente.

Analiza circuitelor electrice în regim tranzitoriu este posibila:

- în domeniul timp (reprezentare directa a marimii functie de timp) prin urmatoarele metode:

- a) metoda directa
- b) a variabilelor de stare
- c) metoda raspunsului tranzitoriu la excitatie treapta

- în domeniul frecventa (utilizeaza reprezentari simbolice ale functiilor) prin urmatoarele metodele:

- a) aplicarea transformatei Fourier (metoda spectrala)
- b) aplicarea transformatei Laplace (metoda operationala)

7.1 Teoremele comutatiei

În circuitele ce contin bobine si condensatoare trecerea de la un regim permanent la un alt regim nu are loc instantaneu deoarece, în regimuri diferite energia înmagazinata în câmpul electromagnetic al circuitului are valori diferite. Orice variatie a energiei într-un interval presupune o variatie a puterii sursei conform relatiei

$$p_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{em}}{\Delta t}$$
. Daca trecerea de la o stare la alta stare are loc instantaneu ($\Delta t = 0$) puterea sursei ar fi infinita ceea ce nu este posibil practic si fizic.

7.1.1 Teorema I a comutatiei

Sa consideram o bobina careia i se aplica o tensiune. Din legea inductiei electromagnetice se deduce tensiunea la bornele bobinei ideale în baza careia se calculeaza fluxul magnetic

$$u_L = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \phi = \int_{-\infty}^t u dt = \int_{-\infty}^0 u(t) dt + \int_0^t u(t) dt = \Phi(0) + \int_0^t u(t) dt .$$

Deoarece tensiunea $u(t)$ este integrabila rezulta ca fluxul este o functie continua si în momentul initial $t=0=0_+$ fluxul este $\Phi(0_-)=\Phi(0_+)$

Analizând invers dacă fluxul Φ ar fi discontinuu atunci tensiunea la bornele bobinei tinde la infinit (nu-l posibil fizic).

Concluzii:

1° Fluxul magnetic nu poate trece brusc de la o valoare finită la alta valoare finită

2° În circuitele liniare relația de dependență flux –curent este $\Phi=Li$ și în consecință curentul într-o bobină liniară nu variază în salt.

7.1.2 Al II-a teorema a comutației

Energia electrică înmagazinată într-un condensator este dată de relația $W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$. Variația acestei energii reprezintă puterea instantanee la bornele condensatorului. Curentul prin condensator este definit de relația $i = \frac{dq}{dt}$. Dacă sarcina q ar varia în salt curentul prin condensator ar avea valoare infinită, ceea ce nu este posibil fizic.

Concluzii:

1° Sarcina $q = q(0) + \int i dt$ este o funcție continuă și nu variază în salt.

2° Pentru circuitele liniare, dependența sarcină - tensiune este dată de relația $q=Cu$ și, în consecință, tensiunea pe un condensator nu variază în salt (tensiunea este funcție continuă).

7.2. Metode de analiză în domeniul timp a circuitelor electrice

Pentru analiza în domeniul timp ale circuitelor electrice în regim tranzitoriu se aplică:

1- metoda directă pentru circuitele de ordinul I și II

2- metoda variabilelor de stare pentru circuite de ordin mai mare sau egal cu II

7.2.1 Metoda directă de analiză a circuitelor de ordinul I

Dacă circuitul electric supus analizei conține un singur element conservativ (reactiv) ecuația caracteristică ce descrie din punct de vedere matematic comportarea circuitului este o ecuație diferențială de ordinul I.

Circuitele de ordinul I pot fi R-C, R-L serie sau paralel. Aceste circuite pot fi sub excitație proprie sau improprie. Răspunsul sistemului sub excitație proprie poartă numele de raspuns natural.

Circuitul este sub excitație proprie dacă din ecuația diferențială de ordinul I pe care o satisface răspunsul, impunând condițiile de regim permanent, acesta (răspunsul) se poate determina direct din excitație. În continuare sunt prezentate tabelat circuitele de ordinul I în regim de excitație proprie:

Circuite R – C

	<p>Aplicând teorema de transformare a surselor de tensiune în surse de curent față de bornele condensatorului</p>	
$\begin{cases} e(t) = u_R + u_C \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$ $e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$		$i_g = i_R + i_C; i_g = \frac{e}{R}$ $i_R = \frac{u_C}{R}; i_g = \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt}$ $i_g R = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$

Circuite R – L

	<p>Aplicând teorema de transformare a surselor de tensiune în surse de curent față de bornele bobinei</p>	
$i_g = i_R + i_L$ $u_L = u_R = Ri_R = L \frac{di_L}{dt}$ $\Rightarrow i_R = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$ $i_g = i_L + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$		$e = i_g \cdot R$ $i_g R = Ri_L + L \frac{di_L}{dt}$ $\frac{e}{R} = i_L + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt}$

Ecuatiile de tipul $\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$ sunt ecuatii de ordinul I în regim de excitație proprie. Dacă se anulează variația în timp $\frac{d}{dt} = 0$ se obține regimul permanent iar răspunsul are aceeași formă de variație cu excitația $y(t)=x(t)$. Răspunsul $y(t)$, egal cu excitația $x(t)$, este răspunsul natural pentru circuitele în regim de excitație proprie.

Să analizăm răspunsul natural pentru circuitul RC cunoscând încărcarea continuă a condensatorului cu tensiunea U_C de la zero la tensiunea E (fig.7.1). Presupunând condensatorul încărcat cu tensiunea E în caz de scurtcircuitare a circuitului RC se obține ecuația ce descrie descărcarea unui condensator în condiții initiale nenule ($U_C(0)=E$) $U_R + U_C = 0$, relație echivalentă cu $Ri + u_c = 0$. Curentul de descărcare înlocuit în ecuația prezentată conduce la ecuația diferențială de ordinul I:

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

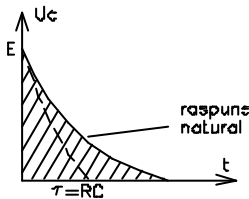


Fig.7.1

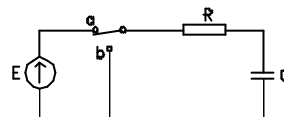


Fig.7.2

Ecuația caracteristică a diferențialei de ordin I este $RCp+1=0$ iar soluția are forma: $U_C = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}$ - cu A constantă ce se determină din condițiile inițiale și anume la $t=0$, tensiunea ce încarcă condensatorul este $U_C = U_{C0} = E = A$. Această constantă înlocuită în ecuația tensiunii ce descrie descărcarea condensatorului conduce la $U_C = Ee^{-t/\tau}$, relație ce descrie evoluția tensiunii pe condensator la descărcare.

La încărcarea condensatorului în condiții inițiale nule $U_C(0)=0$ ecuația în tensiune a circuitului este neomogenă: $RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = E$ și admite soluții de forma: $U_C = U_{C0} + U_{Cf}$ unde U_{C0} - reprezintă soluția ecuației omogene iar U_{Cf} - soluția impusă de excitație. În regim permanent pentru circuitul analizat (excitație în cc) $U_{Cf} = E$ iar soluția ecuației omogene are forma $U_C = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}$. Astfel se obține $U_C = Ae^{-t/\tau} + E$. Constanta de integrare din relația prezentată se determină din impunerea condițiilor inițiale și anume:

- la $t=0$, tensiunea ce încarcă condensatorul este nula $U_C=0$ rezultând astfel constanta de integrare $A=-E$. Se determina astfel evoluția în timp a tensiunii de încărcare a condensatorului $U_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ cu reprezentarea grafică din fig.7.3:

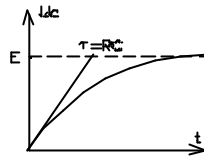


Fig. 7.3

Metoda clasică de rezolvare a acestor ecuații constă în rezolvarea ecuației omogene. Soluția găsită da un proces liber de anulare (stingere) denumită soluție de regim liber $y_{10}(t)$. La soluția generală a ecuației omogene se adaugă o soluție particulară a ecuației neomogene. Așa se obține soluția generală a ecuației neomogene, din care, cu o alegere adecvată a constantei se obține soluția corespunzătoare condițiilor inițiale date. Dacă este vorba de circuite cu excitație constantă sau excitație sinusoidală, se obține imediat soluția particulară. Soluția generală se exprimă deci:

$$y(t) = y_{10}(t) + y_f(t)$$

Observație:

1° Soluția ecuației omogene este datorată energiei înmagazinate în elementul reactiv. Întotdeauna $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{10}(t) = 0$, cu y_{10} – soluție de regim liber (a ecuației omogene)

7.2.1.1 Soluția generală a ecuațiilor diferențiale de ordinul I

1. Ecuațiile de ordinul I omogene $\tau \frac{dy_1}{dt} + y_1 = 0$ admit soluții de forma: $y = Ae^{pt}$.

Soluția este denumită componenta de regim liber. Aceasta soluție înlocuită în ecuația diferențială conduce la următoarea formă: $\tau p Ae^{pt} + Ae^{pt} = 0$ sau $(\tau p + 1)Ae^{pt} = 0$.

Deoarece $Ae^{pt} \neq 0$ (fiind soluție), atunci relația $\tau p + 1 = 0$, se numește ecuația caracteristică a ecuației diferențiale de ordinul I.

Impunând condițiile inițiale la $t=0$, $y(t) = y(0)$, rezultă evoluția în timp a componentei de regim liber $y_1 = y(0) \cdot e^{-t/\tau}$ redată în graficul din fig.7.4.

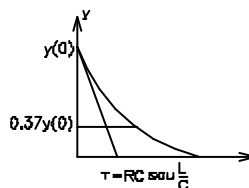


Fig. 7.4

2. Constanta de timp τ reprezintă timpul după care răspunsul își atinge valoarea de regim permanent dacă ar avea aceeași viteză de variație cu cea din momentul inițial. Ea reprezintă timpul ideal de atingere a răspunsului permanent dacă răspunsul ar avea aceeași viteză de variație cu cea din momentul inițial. (răspuns ideal)

Răspunsul circuitului în momentul $t = \tau$ este:

$$y(\tau) = y(0) \cdot e^{-1} = \frac{y(0)}{e} = \frac{y(0)}{2,7} = 0,37y(0)$$

ceea ce conduce la următoarea observație că după $t = \tau$ semnalul răspuns are amplitudinea redusă de e ori.

De foarte multe ori dorim să estimăm care este timpul t_ε după care răspunsul $y(t)$ are valoarea ε din valoarea inițială $y(0)$. În această situație: $y(t) = \varepsilon y(0)$, dar $y(t) = y(0) \cdot e^{-t/\tau}$ rezultând $\Rightarrow \frac{y(t)}{y(0)} = e^{-t/\tau} \Rightarrow t_\varepsilon = -\tau \ln \frac{y(t)}{y(0)}$ sau $t_\varepsilon = -\tau \ln \varepsilon$ cu $\varepsilon = \frac{y(t)}{y(0)}$ ce are valoarea cuprinsă între 0 și 1 ($0 < \varepsilon < 1$).

3. Dacă în domeniul timp soluția este $y(t) = y(0) \cdot e^{-t/\tau}$, în planul ecuației caracteristice $p = -\frac{1}{\tau}$ (planul p) soluției îi corespunde un punct pe axa reală cu valoarea $p = \sigma$. Întrucât în planul ecuației caracteristice $p = \sigma + j\omega = -\frac{1}{\tau}$ deducem atenuarea:

$$\frac{y(t)}{y(0)} = e^{-t/\tau} = e^{\sigma t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \text{ rezultând: } e^{\sigma t} = \frac{y(t)}{y(0)} \text{ respectiv } \sigma = \frac{1}{t} \ln \frac{y(t)}{y(0)}$$

4. Soluția ecuației diferențiale neomogene de ordin I se obține astfel: multiplicăm ecuația diferențială cu $(1/\tau) e^{t/\tau}$

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t) \quad \left| \frac{1}{\tau} e^{t/\tau} \right.$$

rezultând:

$$\frac{dy}{dt} e^{t/\tau} + \frac{1}{\tau} y e^{t/\tau} = \frac{1}{\tau} x(t) e^{t/\tau} \text{ sau}$$

$$\frac{d}{dt} [y e^{t/\tau}] = \frac{dy}{dt} e^{t/\tau} + \frac{1}{\tau} \cdot y \cdot e^{t/\tau}$$

atunci:

$$\frac{d}{dt} [y e^{t/\tau}] = \frac{1}{\tau} \cdot x(t) \cdot e^{t/\tau}$$

Integrând în raport cu ξ de la zero la t rezultă:

$$\int_0^t \frac{d}{d\xi} [y(\xi)e^{\xi/\tau}] d\xi = \int_0^t \frac{1}{\tau} x(\xi)e^{\xi/\tau} d\xi$$

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{y(0)e^{-t/\tau}}_{y_l} + \underbrace{\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t x(\xi)e^{\xi/\tau} d\xi}_{y_f}$$

Solutia ecuatiei neomogene este $y=y_l+y_f$, unde:

y_l – componenta libera impusa de conditiile initiale denumita si raspuns natural
impus numai de starile initiale

y_f – componenta forzata impusa de excitatie

7.2.1.2 Particularizarea solutiei generale pentru circuitele electrice excitate în cc si ca

1. Circuitul de ordinul I excitat în curent continuu $x(t)=X(t)=X_S=ct$ admite urmatoarea solutie:

$$y(t) = y(0)e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \left(X \cdot \tau \cdot e^{\xi/\tau} \Big|_0^t \right)$$

$$y(t) = y(0)e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} X \tau e^{-t/\tau} \cdot e^{t/\tau} - \frac{X \cdot \tau \cdot e^{-t/\tau}}{\tau}$$

$$y(t) = y(0)e^{-t/\tau} + X(1 - e^{-t/\tau}) = \underbrace{y(0)e^{-t/\tau}}_{\text{stare initiala}} + \underbrace{X}_{\text{raspuns permanent}} - \underbrace{X e^{-t/\tau}}_{\text{excitatie initiala}}$$

Impunerea conditiei de regim permanent conduce la $t = \infty \quad y(\infty) = X$

$$y(t) = \underbrace{(y(0) - y_f(\infty))e^{-t/\tau}}_{\text{solutie regim tranzitoriu}} + \underbrace{y_f(\infty)}_{\text{solutie regim permanent}}$$

2 Circuitul de ordinul I excitat în c.a $x(t)=X_m \cos \omega t$ admite urmatoarea solutie:

$$y_f = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t X_m \cos \omega \xi e^{\xi/\tau} d\xi = \frac{X_m e^{-t/\tau}}{\tau} \underbrace{\int_0^t e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi d\xi}_{I_1}$$

Rezolvând prin parti integrala I_1 în baza notatiilor urmatoare :

$$\left. \begin{array}{l} u = e^{\xi/\tau} \\ dv = \cos \omega \xi d\xi \end{array} \right\| \begin{array}{l} du = \frac{1}{\tau} e^{\xi/\tau} d\xi \\ v = \frac{1}{\omega} \sin \omega \xi \end{array}$$

rezulta: $I_1 = \frac{1}{\omega} \sin \omega \xi e^{\xi/\tau} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{1}{\tau \omega} e^{\xi/\tau} \sin \omega \xi d\xi .$

Notând: $I_2 = \int_0^t e^{\xi/\tau} \sin \omega \xi d\xi = -\frac{1}{\omega} e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi \Big|_0^t + \frac{1}{\omega \tau} \underbrace{\int_0^t e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi d\xi}_{I_1}$, si în baza acelorasi

notatii aplicând integrarea prin parti rezulta:

$$\begin{array}{l} u = e^{\xi/\tau} \\ dv = \sin \omega \xi d\xi \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} du = \frac{1}{\tau} e^{\xi/\tau} d\xi \\ v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega \xi \end{array} \right.$$

$$I_1 = A + \frac{1}{\omega^2 \tau} e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi \Big|_0^t - \frac{1}{\omega^2 \tau^2} I_1$$

$$I_1 \left(1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2} \right) = \frac{1}{\omega} \sin \omega \xi e^{\xi/\tau} \Big|_0^t + \frac{1}{\omega^2 \tau} e^{\xi/\tau} \cos \omega \xi \Big|_0^t$$

$$I_1 \left(\frac{1 + \omega^2 \tau^2}{\omega^2 \tau^2} \right) = \frac{1}{\omega} e^{t/\tau} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 \tau} e^{t/\tau} \cos \omega t - \frac{1}{\omega^2 \tau}$$

Atunci solutia fortata de excitatie a ecuatiei este:

$$y_f = \frac{X_m e^{-t/\tau}}{\tau} \cdot \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \cdot \left[\frac{e^{t/\tau}}{\omega^2 \tau} \cos \omega t + \frac{e^{t/\tau}}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{\omega^2 \tau} \right]$$

$$y_f = \frac{X_m}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t - e^{-t/\tau} \right]$$

Utilizând identitatea trigonometrica $\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t = \sqrt{1 + (\omega \tau)^2} [\cos(\omega t - \arctg \omega \tau)]$

înlocuita in solutia fortata de excitatie conduce la:

$$\Rightarrow y_f = \underbrace{\frac{X_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau)}_{y_f(\infty)} - \underbrace{\frac{X_m}{1 + \tau^2 \omega^2} e^{-t/\tau}}_{y_f(0) = \frac{X_m}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \cos(\arctg \omega \tau)}$$

În baza notatiilor de mai sus se poate defini solutia completa de regim tranzitoriu sub forma:

$$y_t = \underbrace{(y(0) - y_f(0)) e^{-t/\tau}}_{\text{solutia de regim tranzitoriu}} + \underbrace{y_f(\infty)}_{\text{solutia impusa de regimul permanent}}$$

7.2.1.3 Determinarea solutiei generale a regimului tranzitoriu în circuitele de ordinul I ce contin surse independente

Exemplul 1

Sa consideram spre exemplificare un circuit RC ce prezinta conditii initiale $U_C(0)=5V$, circuit cuplat la $t=0$ la o sursa de curent continuu de valoare $E=10V$. Urmărim sa determinam tensiunea la bornele condensatorului.

Rezolvare: Ecuația circuitului rezulta din aplicarea teoremei II Kirchhoff astfel:

$$\underline{e(t)=E} \Rightarrow U_R + U_C = E, \text{ dar } i = C \frac{dU_C}{dt}$$

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = E. \text{ Solutia conform celor prezentate anterior este:}$$

$$U_C = U_{Ct} + U_{Cp} \text{ cu } U_{Ct} = Ae^{-t/\tau}$$

U_{Cp} – impusa de excitatie având valoarea $U_{Cp}=E$. Rezulta astfel:

$$U_C(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

Impunând condițiile initiale și anume la $t=0$, $U_C(t)=U_C(0)=A+E \Rightarrow A=U_C(0)-E$ se obtine evolutia în timp a tensiunii la bornele condensatorului.

$$U_C(t) = (U_C(0) - E)e^{-t/\tau} + E$$

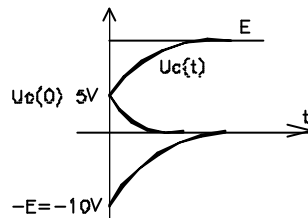


Fig. 7.5

Exemplul 2

Circuitul RC excitat în ca cu $e(t)=10 \cdot \cos 2\pi 10^3 t$, $\omega=10^3$ conduce la următoarea ecuație diferențială $\tau \frac{dU_C}{dt} + U_C = E_m \cos \omega t$. Solutia acestei ecuații este de forma $U_C = U_{Ct} + U_{Cp}$ cu $U_{Ct} = Ae^{-t/\tau}$ iar U_{Cp} – soluție a ecuației în regim permanent sinusoidal. Deducem soluția ecuației diferențiale în regim permanent sinusoidal prin reprezentarea în complex a aceleiași ecuații obținând $j\omega RC \underline{U}_C + \underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j0}$.

$$\text{Rezolvarea în complex conduce la: } \underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow \underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \right),$$

relatie echivalenta cu $\underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 (RC)^2} \cdot e^{j \arctg \omega RC}}$ sau restrânsa sub forma:

$$\underline{U}_C = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega RC}$$

Trecând din planul complex în domeniul timp solutia este:

$$U_{Cp}(t) = \text{Re}\left\{\sqrt{2}e^{j\omega t} \cdot \underline{U}_C\right\} = \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau)$$

Solutia generala a ecuatiei neomogene este:

$$U_C(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau)$$

Impunând conditiile initiale si anume la $t=0$, $U_C(t)=U_C(0)=5V$ rezulta valoarea constantei de integrare A:

$$U_C(0) = A + \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\arctg \omega \tau), \quad A = \frac{U_C(0)}{y(0)} - \underbrace{\frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\arctg \omega \tau)}_{y_f(0)}$$

$$U_C(t) = \left(U_C(0) - \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\arctg \omega \tau) \right) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{E_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \arctg \omega \tau)$$

Aplicatii tipice ale circuitelor de ordinul 1

1. *Circuit integrator RC*

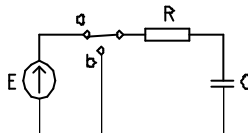


Fig. 7.6

Considerând tensiunea pe condensator $U_C=U_o$ – tensiune de iesire, forma de variatie în timp a acesteia este redată în figura 7.7 a

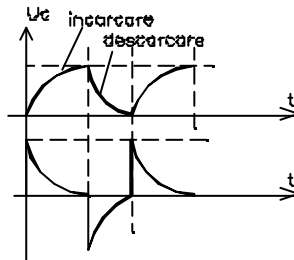


Fig. 7.7

2. *Circuit derivator RC*

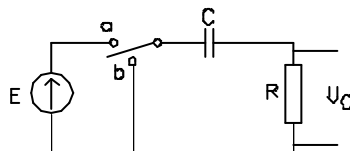


Fig. 7.8

Considerând tensiunea pe rezistor $U_R = Ri = RC \frac{dU}{dt}$ tensiune de iesire, forma de variatie în timp a acesteia este redată în figura 7.7b.

Generalizarea constantei de timp pentru orice retea de ordinul 1

Constanta de timp pentru retele RC este $t=RC$ respectiv $t=L/R$ pentru orice retea RL

7.2.1.4 Determinarea solutiei generale a regimului tranzitoriu în circuitele de ordinul I ce contin surse dependente

Exemplul 1

Circuitul din figura 7.9 functioneaza cu întrerupatorul k închis. La momentul $t=0$ se deschide. Sa se traseze variatia tensiunii $v(t)$ de pe rezistenta de $1K\Omega$.

a) În regim permanent (înainte de descarcare) stabilim tensiunea $U_c(0)$ ce încarca condensatorul.

Rezolvare:

Potentialul V_1 este impus de sursa rezultând $i_x = \frac{v_1}{10} = \frac{5}{10} = 0,5mA$.

Aplicând T2K pe ochiul 2 obținem:

$$v_2 + 1 \cdot 4 \cdot i_x = 0, \quad v_2 + 1 \cdot 4 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow v_2 = -2V$$

$$u_c(0) = v_1 - v_2 = 5 - (-2V) = 7V$$

b) În regim tranzitoriu, la deschiderea întrerupatorului k, circuitul echivalent este:

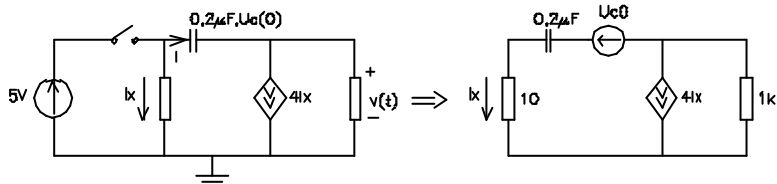


Fig.7.9.

Tensiunea la bornele condensatorului este:

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{u_c(0)}$

careia îi corespunde ecuatia Joubert $-u_c(0) + u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$.

Urmărim în continuare sa asociem fata de bornele condensatorului încarcat cu tensiunea U_{c0} o rezistenta echivalenta a circuitului (fig. 7.10).

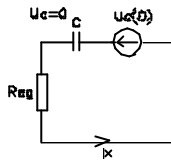


Fig. 7.10

În aceasta situatie putem exprima comod curentul de descarcare al condensatorului conform relatiilor: $u_c(0) = u_c + u_{Reg}$, $u_{Reg} = R_{eg} \cdot C \frac{du_c}{dt}$. Rezulta:

$$u_c(0) = u_c + R_{eg} \cdot C \frac{du_c}{dt}$$

Solutia acestei ecuatii este $u_c(t) = u_{c0} + u_{cp}$ cu

$$\left. \begin{aligned} u_{c0} &= A e^{-t/\tau} \\ u_{cp} &= u_c(0) \end{aligned} \right\} u_c(t) = u_{c0} e^{-t/\tau}$$

Impunerea conditiilor la limita (regim permanent) $t \rightarrow \infty$, conduc la $u_c = 0$, $u_{cp} = 0$.

Curentul de descarcare este dat de relatia $i = C \frac{du_c}{dt} = C \cdot u_{c0} \cdot \left(-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right)$. Înlocuirea

constantei de timp a circuitului în solutia de mai sus conduce la urmatoarea relatie a

curentului de descarcare $i = -\frac{u_{c0}}{R_{eg}} e^{-t/\tau}$.

În prezentarea anterioara avem de rezolvat problema determinarii rezistentei echivalente asociate circuitului. Pentru determinarea acesteia avem posibilitatea alimentarii circuitului de la o sursa independenta exterioara, în absenta laturii condensatorului încarcat, caz în care rezistenta echivalenta este:

$$R_{eg} = \frac{u}{i}; \begin{cases} 10i_x + i_1 = u \\ 0 = i_x + 4i_x - i_1 \Rightarrow i_1 = 5i_x \end{cases} \Rightarrow 10i_x + 5i_x = u \Rightarrow 15i_x = u$$

$$i_x = \frac{u}{15} \Rightarrow R_{eg} = \frac{u}{i_x} = \frac{u}{\frac{u}{15}} = 15K \Omega$$

În baza acestei rezolvarii curentul de descarcare al condensatorului respectiv tensiunea la bornele rezistorului de $1k\Omega$ devin

$$i = \frac{-7}{15} \cdot e^{-t/\tau}; \quad v(t) = 5i_x = -\frac{7 \cdot 5}{15} e^{-t/\tau} = -\frac{7}{3} e^{-t/\tau} V$$

Valoarea înainte de comutare a tensiunii pe rezistorul de $1k\Omega$ rezulta din

aplicarea teoremei II Kirchhoff $v + 4i_x \cdot 1 = 0 \Rightarrow v = -4 \cdot \frac{5}{10} \cdot 1 = -\frac{20}{10} = -2V$.

7.2.2 Metoda variabilelor de stare

7.2.2.1 Ecuatiile de stare

Metoda variabilelor de stare este o metoda de calcul avantajoasa atât pentru circuitele liniare, cât si pentru cele neliniare. Metoda consta în introducerea variabilelor de stare - tensiunile condensatoarelor si curentii bobinelor (marimile ce nu variaza în salt) - pe baza unui sistem de ecuatii diferentiale de ordinul I pentru care se exprima solutia cu ajutorul functiilor de matrice. Avantajele principale ale metodei consta în faptul ca metoda ia în considerare simplu conditiile initiale, se programeaza usor pe calculatoarele numerice si poate fi generalizata pentru orice circuite.

Ca exemplu se considera un circuit oscilant serie fara pierderi, circuit caruia îi corespund ecuatiile: $C \frac{du_c}{dt} = i_l$; $L \frac{di_l}{dt} = -Ri_l - u_c + e$.

În notatie matriceala ecuatiile se scriu:

$$-\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_c \\ i_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_c \\ i_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot e$$

Aceasta expresie este un caz particular al ecuatiei diferentiale matriceale $\frac{dy}{dt} = Ay + bx$, în care y este vectorul de stare care descrie starea electrica a circuitului în spatiul starilor.

Matricele coeficientilor **A, b** se numesc matricea de tranzitie a sistemului si respectiv matricea asociata vectorului de intrare **x**. Solutia acestei ecuatii este similara celei discutate în subcapitolul anterior (7.2.1.2).

7.2.2.2 Schema structurala de calcul a regimului tranzitoriu pentru ecuatiile ordinul I

Ecuatia diferentia pe care o satisface circuitul RL sau RC este de ordinul 1 cu forma: $\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t)$, având solutia $y = y(0)e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t x(t') \cdot e^{-t'/\tau} dt'$, solutie ce evidentiaza componentele raspunsului daca este exprimata sub urmatoarea forma:

$$y = \left(y(0) - \underbrace{y_t(0)}_{y_{tranz}} \right) \cdot e^{-t/\tau} + \underbrace{y(\infty)}_{y_{perm}}$$

Ecuatia diferentiala de ordinul I poate fi scrisa sub forma ecuatiei de stare astfel:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot y + \frac{1}{\tau} x(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} [y] = \left[-\frac{1}{\tau} \right] \cdot [y] + \left[\frac{1}{\tau} \right] \cdot [x(t)]$$

Implementarea acestei ecuatii pe un calculator necesita urmatoarea schema structurala:

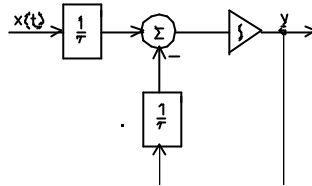


Fig.7.11

schema ce se initializeaza prin $y(0)$ adica pentru $t=0, y=y(0)$.

Rezolvarea acestei ecuatii implica cunoasterea valorii initiale $y(0)$. Raspunsul y este variabila de stare (u_c sau i_L) ceea ce confirma inca odata ca bobina sau condensatorul este complet definit de valorile L si $i_L(0)$ respectiv C si $u_c(0)$.

7.2.2.3 Raspunsul circuitelor liniare de ordinul II

Presupunem ca in circuit exista elemente reactive de ambele tipuri, atat L cat si C . Studiul acestor circuite poate fi redus la studiul ecuatiei satisfacuta de circuitul RLC serie, respectiv RLC paralel.

A. Marimi de stare ale circuitelor de ordin II

a) RLC serie excitat in tensiune

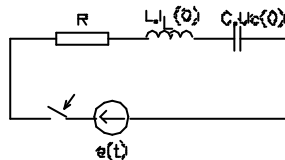


Fig.7.12.

Aplicand in circuitul din figura 7.12 teorema II Kirchoff se obtine ecuatia in tensiune $e(t) = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + u_c$. Alegand variabila de stare tensiunea pe condensator u_c prin

impunerea conditiei de conexiune $i_c = C \frac{du_c}{dt} = i_L = i_R$ rezulta:

$$e(t) = RC \frac{du_c}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_c}{dt} \right) + u_c \Rightarrow LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} = e(t)$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{e(t)}{LC}$$

Rezolvarea implica cunoasterea $u_c(0)$ si $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0}$. Tensiunea initiala a condensatorului $u_c(0)$ este cunoscuta dar derivata acesteia nu este explicit cunoscuta $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0}$. Aceasta este determinata din curentul initial prin bobina astfel:

$$i_L = i_c = C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_L(0)}{C}.$$

Daca se alege variabila de stare curentul din bobina i_L ($i_L = i_c = C \frac{du_c}{dt}$) ecuatia pe care o satisface acest curent se obtine derivând ecuatia tensiunilor

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{du_c}{dt} = \frac{de}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}.$$

Împartind prin L rezulta: $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$. Rezolvarea implica cunoasterea

$$i_L(0) \text{ si } \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_c}{dt} \right) \right|_{t=0}$$

b) Circuit RLC paralel considerând gruparea paralel RLC în care elementele reactive prezinta conditii initiale, din aplicarea teoremei I Kirchhoff rezulta:

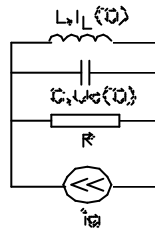


Fig. 7.13

$$i_g = i_R + i_L + i_C$$

$$i_g = \frac{u}{R} + i_L + C \frac{du_c}{dt}$$

Impunerea conditiei de conexiune $u_c = u_R = u_c = L \frac{di_L}{dt}$ conduce la:

$$i_g = \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + CL \frac{d^2i_L}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{RLC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{i_g}{LC}$$

$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{i_g}{LC}$ ecuatie în care variabila de stare este curentul prin bobina.

Utilizarea tensiunii condensatorului drept variabila de stare u_c necesita definirea

urmatoarei ecuatii (derivarea relatiei curentilor din teorema I Kirchoff):

$$\frac{di_g}{dt} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_L}{dt} + \frac{di_c}{dt}$$

$$i_R = \frac{u}{R}, \quad i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\frac{di_g}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_c}{dt} + \frac{d}{dt}(i_L) + C \frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L} = \frac{u_c}{L}$$

atunci: $\frac{di_g}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{L} + C \frac{d^2 u_c}{dt^2}$ sau $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{C} \frac{di_g}{dt}$.

B. Solutia ecuatiei diferentiale omogene a ecuatiilor de ordinul II

Ecuatia generala a circuitelor de ordinul II este $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \cdot \xi \omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = x$, ecuatie

obtinuta pe baza urmatoarelor notatii:

$$\begin{cases} 2\xi\omega_0 = \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2\xi\omega_0 = \frac{1}{RC} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases}.$$

Daca presupunem variabila de stare de forma $y = Ae^{pt}$, solutie nenula a ecuatiei diferentiale, ecuatia caracteristica este: $y[p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2] = 0 \Rightarrow p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$ cu

radacinile: $p_{1/2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \omega_0$.

Matematic, daca:

$$1. \ x > 1 \text{ atunci, } p_1 = -\omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) = -\frac{1}{\tau_1}; \quad p_2 = -\omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) = -\frac{1}{\tau_2}$$

$$\Rightarrow \tau_1 = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\omega_0 \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \left. \vphantom{\tau_1} \right\} p_1, p_2 \in \mathbf{R}.$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{\omega_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)}$$

În acest caz ($p_1, p_2 \in \mathbf{R}$) solutia ecuatiei omogene este aperiodica, (fig.7.14). În exprimare matematica avem solutia $y_c(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$, în care constantele se determina din conditiile initiale si anume:

$$\left. \begin{aligned} t=0, \quad y(0) = A_1 + A_2 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau_1} A_1 + \frac{1}{\tau_2} A_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \left(y(0) + \tau_2 \frac{dy(0)}{dt} \right) \\ A_2 &= \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \left(y(0) + \tau_1 \frac{dy(0)}{dt} \right) \end{aligned}$$

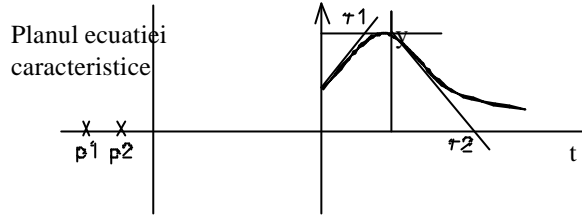


Fig. 7.14

Parametrul $\xi = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \frac{R}{2L} \cdot \sqrt{\frac{LC}{1}} = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{1}{2} \frac{R}{Z_0}$ reprezinta rata

atenuarii. Factorul de calitate al circuitului este $Q = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 LI}{RI} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}$, cu $Z_0 = RQ$ face ca

rata atenuarii exprimata functie de acesta sa fie $\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Q}$.

2. Daca $\alpha=1$ atunci $\sqrt{\xi^2 - 1} = 0$ se obtine regimul aperiodic critic în care

$\tau_1 = \tau_2, p_1 = p_2, \tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \xi}, p_1 = -\omega_0 \xi$. Solutia ecuatiei circuitului este în acest caz

reprezentata în fig.7.15.

$$y_e = (C_1 + C_2 t) e^{-\xi \omega_0 t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\alpha t}$$

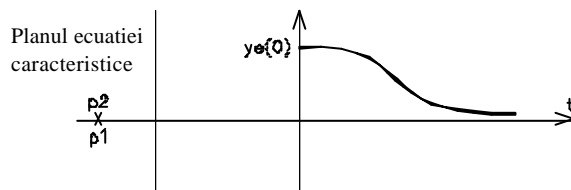


Fig. 7.15

3. Daca $\alpha < 1$, atunci $\omega_d = \omega_0 \left(\sqrt{1 - \xi^2} \right)$ iar radacinile sunt:

$$p_{1,2} = -\xi \omega_0 \pm j \omega_d = -\alpha \pm j \omega_d$$

unde: α - coeficient de amortizare si ω_d - pseudopulsatie

Solutia ecuatiei este (fig.7.16): $y = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \beta)$

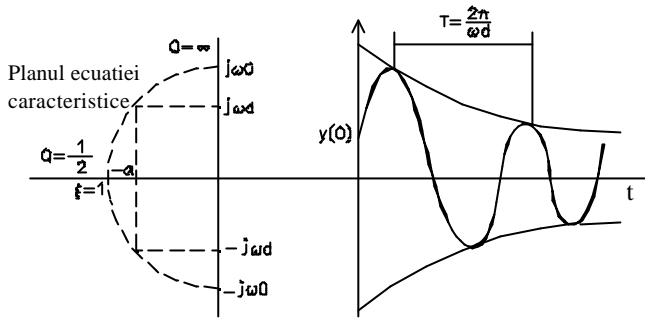


Fig. 7.16

C. Ecuatii de stare pentru circuitele de ordinul II

Metoda variabilelor de stare consta în transformarea ecuatiilor diferentiale de ordinul II si superior în sisteme de ecuatii de ordinul I. Variabilele de stare utilizate sunt curentii prin bobine i_L si tensiunile de la bornele condensatoarelor u_c .

În continuare exemplificam transformarea ecuatiei diferentiale de ordinul II într-un sistem de doua ecuatii de ordinul I.

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_c \frac{du_c}{dt} + u_c = e(t)$$

Variabilele de stare u_c si $i_L = i_c = C \frac{du_c}{dt}$ înlocuite în ecuatie de mai sus conduc la

definirea sistemului.

$$\begin{cases} i_L = C \frac{du_c}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + u_c = e(t) \end{cases} \quad \text{rearanjate sub forma:} \quad \begin{cases} \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_L \\ \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} u_c + \frac{R}{L} e(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$\frac{d}{dt} [y] = [A][y] + [B][x(t)]$ ecuatie similara cu a circuitului de ordinul I ce are

forma $\frac{d}{dt} [y] = \left[-\frac{1}{\tau} \right] [y] + \left[\frac{1}{\tau} \right] [x(t)]; \tau$ - constanta de timp (de tranzitie).

D. Schema structurala de calcul atasata ecuatiilor de ordinul II

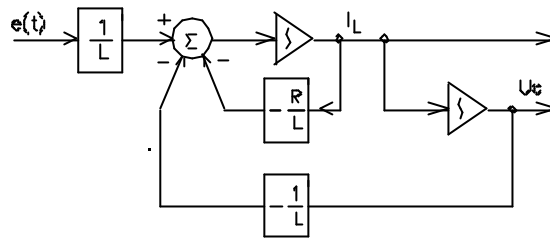


Fig. 7.17

E. Aplicarea metodei variabilelor de stare în circuitele ce contin surse dependente

Exemplificam metoda variabilelor de stare pe circuitul din fig.7.18.

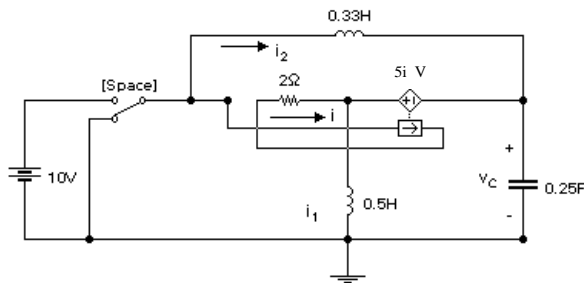


Fig.7.18.

Marimile de stare sunt curenții prin bobine și tensiunile de la bornele condensatoarelor. În circuitele ce contin surse dependente, sistemul ecuatiilor de stare trebuie completat cu relatia de dependenta introdusa de sursa comandata. În scrierea sistemului de ecuatii sursa dependenta se trateaza ca una independenta. Sistemul de ecuatii atasat circuitului din fig.7.18 este:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & -\frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ 3 \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot v_s$$

rezultat al aplicarii teoremei I Kirchhoff $-i_2 + C \cdot \frac{dv_C}{dt} - i + i_1 = 0$, si al definitiei tensiunii pe

bobine: $L_2 \frac{di_2}{dt} = v_s - v_C$ si $L_1 \frac{di_1}{dt} = 5i + v_C$, unde $i = \frac{v_s - 5i - v_C}{2}$, $v_s = 10V$.

7.3. Metode de analiza în domeniul frecvența

7.3.1 Metoda operationala (a transformatei Laplace)

Fiind data o functie variabila $f(t)$, neteda pe portiuni pentru $t > 0$, ce satisface inegalitatea $|f(t)| < Ae^{\sigma_0 t}$ cu $\sigma_0 > 0$ pentru $t > t_0$ (creste mai lent decât o exponentiala), se defineste transformata Laplace (sau imaginea Laplace) prin relatia:

$$F(p) = \mathbf{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

unde: - $F(p)$ – functie de variabila complexa, $p = \sigma + j\omega$ ($\sigma > \sigma_0$ pentru a creste mai lent ca exponentiala).

Functia $f(t)$ se numeste functie original iar $F(p)$ functie imagine.

A. Proprietatile transformatei Laplace

1. Liniaritate

$$\mathbf{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathbf{L}[f(t)] + \beta \mathbf{L}[g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$$

2. Teorema valorilor limita

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$$p = \sigma + j\omega = \sigma + j \frac{2\pi}{t}; \quad p \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0_+)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$$

3. Transformata Laplace a derivatei

$$\mathbf{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt; \text{ integrând prin parti: } (uv)' = u'v + uv'. \text{ Rezulta } u'v = (uv)' - uv'$$

cu notatiile $(fe^{-pt})' = \frac{df}{dt} e^{-pt} + f \cdot (-p)e^{-pt} \Rightarrow$

$$\mathbf{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d(f(t)e^{-pt})}{dt} dt - \int_0^{\infty} -pf(t)e^{-pt} dt =$$

$$= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + pF(p) = pF(p) + \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ =0}} f(t) - f(0_-)$$

$$\mathbf{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) - f(0_-)$$

$$\mathbf{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = p^n F(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} \frac{dy(0)}{dt} - \dots - \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}$$

4. Transformata Laplace a integralei

$$\mathbf{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \int_0^{\infty} \int_0^t f(t') dt' e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}$$

întrucât $(uv)' = uv' + u'v$ și considerăm $u = \int_0^t f(t') dt'$, $v = \int e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Rightarrow$

$$\mathbf{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] = -\frac{e^{-pt}}{p} \int_0^t f(t) dt \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-pt}}{-p} dt = \frac{F(p)}{p}$$

5. Teorema întârzierii

$$\mathbf{L}[f(t - \tau)] = \int_{\tau}^t f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t') e^{-p(t'+\tau)} dt' = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(t') e^{-pt'} dt'$$

s-a substituit $t - \tau = t'$ deci $t = t' + \tau$ iar $dt = dt'$

$$\mathbf{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p)$$

6. Teorema atenuarii

$$\mathbf{L}[e^{-\lambda t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+\lambda)t} dt = F(p + \lambda)$$

7. Teorema asemanarii

$$\mathbf{L}[f(kt)] = \int_0^{\infty} f(kt) e^{-\frac{p}{k}t} dt \cdot \frac{k}{k} = \int_0^{\infty} \frac{f(kt)}{k} e^{-\frac{p}{k}kt} d(kt) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

B. Calculul transformatei Laplace a principalelor semnale utilizate în electrotehnica

Sursele de curent continuu sunt, în general, multiplu al funcției treapta unitară, funcție prezentată în fig.7.19.

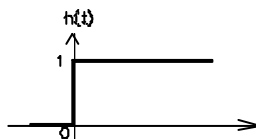


Fig.7.19

Aceasta functie, matematic, are urmatoarea definitie: $h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$. Ea poate fi

considerata conform relatiei $h(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t)$, limita unei functii rampa $f(t)$ (fig.7.20).

Modelând functia rampa prin relatia urmatoare:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\epsilon \\ \frac{t+\epsilon}{2\epsilon}, & -\epsilon < t < \epsilon \\ 1, & t > \epsilon \end{cases} \text{ pentru } t=0, f(t) = \frac{1}{2}.$$

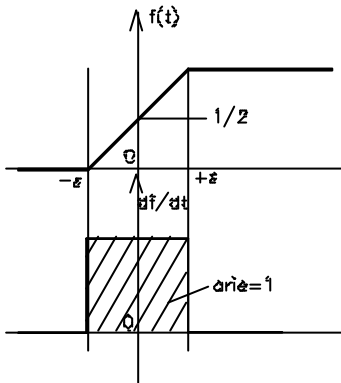


Fig.7.20

În intervalul $(-\epsilon, \epsilon)$ functia $f(t)$ poate fi aproximata printr-o dreapta de ecuatie $f(t)=at+b$. Constantele a si b se pot determina din conditiile la limita, astfel:

$$t=0, f(t) = \frac{1}{2} = b$$

$$t = +\epsilon, f(t) = 1 = a\epsilon + b \Rightarrow a = \frac{1-b}{\epsilon}$$

$$t = -\epsilon, f(t) = 0 = -a\epsilon + b = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{\epsilon}$$

atunci: $f(t) = \frac{b}{\epsilon}t + b = b\left(\frac{t}{\epsilon} + 1\right) = b\left(\frac{t+\epsilon}{\epsilon}\right) = \frac{1}{2\epsilon}(t+\epsilon)$; $f(t) = \frac{t+\epsilon}{2\epsilon}$. Derivata acestei functii se

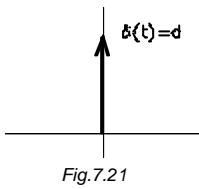
numeste impuls unitar $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\epsilon}$; pentru $\epsilon \rightarrow 0, \frac{df}{dt} \rightarrow \infty$. Notam $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{df}{dt}$ unde:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2 \cdot \epsilon} & -\epsilon < t < \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases} . \text{ Suprafata determinata de impulsul unitar, de latime } 2\epsilon \text{ si înaltime } 1/2\epsilon, \text{ are aria unitate.}$$

La limita impulsul unitar are reprezentarea din fig.7.21, însa, fizic,

aria trebuie sa se conserve, motiv pentru care $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Transformata Laplace a

$$\text{impulsului unitar } \mathbf{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1 .$$



1. Transformata Laplace a impulsului treapta

$L[ch(t)] = \int_0^{\infty} ch(t)e^{-pt} dt$ se obtine din formula de integrare prin parti,

$(uv)' = uv' + u'v$, unde se noteaza $u=ch(t)$ si $v = \frac{e^{-pt}}{-p}$. Înlocuind rezulta:

$$L [ch(t)] = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(ch(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right) dt - \int_0^{\infty} c \frac{e^{-pt}}{-p} dt = \underbrace{ch(t) \frac{e^{-pt}}{-p}}_{=0} \Big|_0^{\infty} + \frac{c}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{c}{p}$$

2. Transformata Laplace a functiei exponentiale $f(t) = e^{-\lambda t}$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-(p+\lambda)t} dt = \frac{1}{p+\lambda}$$

3. Transformata Laplace a functiei sinusoidale $f(t) = y_m \sin \omega t$.

Substituind: $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ se obtine transformata Laplace a functiei:

$$L[y_m \sin \omega t] = \int_0^{\infty} y_m \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{j\omega t} \cdot e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{-j\omega t} \cdot e^{-pt} dt$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{j\omega t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{y_m}{2j} e^{-(p-j\omega)t} dt = \frac{y_m}{2j} \cdot \frac{1}{p-j\omega} \Rightarrow$$

$$L[y_m \sin \omega t] = \frac{y_m}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{y_m}{2j} \cdot \frac{p+j\omega - (p-j\omega)}{p^2 + \omega^2} = \frac{y_m \cdot 2j\omega}{2j \cdot (p^2 + \omega^2)}$$

$$L[y_m \sin \omega t] = y_m \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Similar se obtine transformata Laplace a functiei cosinusoidale:

$$L[y_m \cos \omega t] = L \left[y_m \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] = \frac{y_m}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = y_m \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

C. Determinarea functiei original cunoscând transformata Laplace (Teoreme)

1) Teorema derivarii

$$\frac{d}{dp}(F(p)) = \frac{d}{dp} \left[\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right] = \int_0^{\infty} [-tf(t)]e^{-pt} dt = L[-tf(t)]$$

2) Teorema integrarii

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \mathbf{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] \text{ (operatia inversa derivarii)}$$

3) Teorema Mellin – Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dp \quad \sigma > \sigma_0$$

4) Teorema Heaviside

Daca $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ unde p_k radacinile numitorului sunt reale si distincte atunci

functia imagine poate fi descompusa astfel:

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \dots + \frac{c_k}{p-p_k} = \sum_{p=1}^n \frac{c_k}{p-p_k} \Rightarrow (p-p_k) \frac{P(p)}{Q(p)} = c_k$$

$$\lim_{p \rightarrow p_k} (p-p_k) \frac{P(p)}{Q(p)} = P(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{1}{\frac{Q(p)}{Q(p-p_k)}} = \frac{P(p_k)}{\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{Q(p-p_k)}{p-p_k}} = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}, \text{ unde: } Q'(p_k) = \left. \frac{dQ}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

Rezulta functia imagine de forma $F(p) = \sum \frac{c_k}{p-p_k} = \sum \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}$, iar functia original

corespunzatoare este: $f(t) = \sum_k \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}$.

Daca numitorul are radacini nule $p=0$ functia imagine poate fi descompusa în

fractii simple astfel: $\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p-p_1} + \dots$

Coeficientii fractiilor simple pentru radacinile nenule se calculeaza similar

iar coeficientul radacinii nule se determina cu relatia $c_0 = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{P(p)}{Q(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{P(p)}{p Q_1(p)} = \frac{P(0)}{Q_1(0)}$.

Obtinem în acest mod functia imagine de forma $F(p) = \frac{P(0)}{Q_1(0)} \cdot \frac{1}{p} + \sum \frac{P(p_k)}{p Q_1'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}$ având

functia original data de expresia $f(t) = \frac{P(0)}{Q_1(0)} + \sum \frac{P(p_k)}{p_k Q_1'(p_k)} e^{p_k t}$.

7.3.2 Aplicarea transformatei Laplace în analiza regimurilor tranzitorii ale circuitelor electrice

Analizam în continuare comportarea elementelor simple de circuit în regim tranzitoriu determinând pentru fiecare element ecuatia în domeniul imagine si schema operationala asociata.

7.3.2.1 Transformata Laplace a elementelor simple de circuit

a. Rezistorul

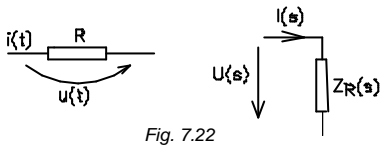


Fig. 7.22

Ecuatia din domeniul timp $u(t)=Ri(t)$ admite urmatoarea imaginea operationala:

$$\mathbf{L}[u(t)]=\mathbf{L}[Ri(t)]=R \mathbf{L}[i(t)] \Rightarrow U(p)=RI(p)$$

Definim în domeniul imagine $\frac{U(p)}{I(p)}=Z(p)$ impedanta operationala a elementului

dipolar. Impedanta operationala a rezistorului este: $Z_R(p)=R$. Inversa acesteia

$$Y(p)=\frac{1}{Z(p)}=\frac{I(p)}{U(p)} \text{ se numeste admitanta operationala.}$$

b. Bobina ideala

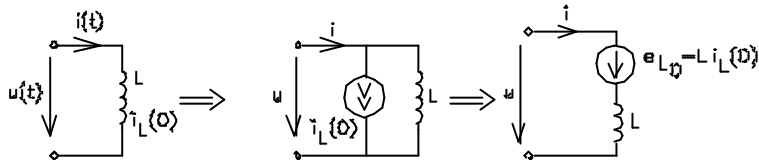


Fig.7.23

Aplicând transformata Laplace relatiei $i(t)=i_L(0)h(t)+\int_0^t u_L(t)dt$ rezulta ecuatia

în domeniul imagine pentru o bobina ideala $I(p)=\frac{I_{L0}}{p}+\frac{1}{L} \frac{U_L(p)}{p}=\frac{I_{L0}}{p}+\frac{U_L(p)}{pL}$ cu

$Z_L(p)=pL \Rightarrow Y_L(p)=\frac{1}{pL}$. Schema operationala atasata ecuatiei operationale este:

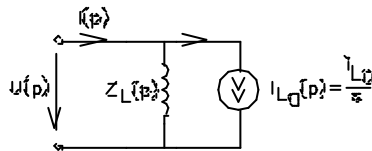


Fig. 7.24

Din ecuatia în tensiune a bobinei $Li(t)=Li_L(0)h(t)+\int_0^t u_L(t)dt$, prin derivare, rezulta

$$L \frac{di}{dt}=Li_L(0)\delta(t)+u_L(t). \text{ Trecând în domeniul imagine se obtine ecuatia operationala si}$$

schema atasata (fig.7.25).

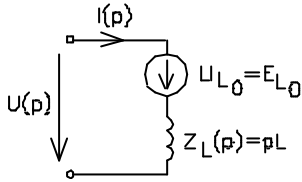


Fig.7.25
 $U_L(p) = pLI(p) - LI_{L0}$

$$pLI(p) = LI_{L0} + U_L(p)$$

$$E_{L0} = LI_{L0}$$

$$Y_L(p) = \frac{1}{pL}$$

Observatie:

Ecuatiei Joubert $e \pm u_b = zi$, prin aplicarea transformatei Laplace conduce la urmatoarea imagine operationala a ecuatiei: $E(p) \pm U(p) = Z(p) \cdot I(p)$.

c. Bobina cuplata magnetic

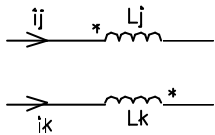


Fig.7.26

Tensiunea la bornele bobinei j, în domeniul timp, este:

$$u_j = L_{ij} \frac{di_j}{dt} + L_{jk} \frac{di_k}{dt} = \sum_{k=1}^n L_{jk} \frac{di_k}{dt}$$

Aplicând transformata Laplace rezulta:

$$\mathcal{L} \left[u_j = \sum_{k=1}^n L_{jk} \frac{di_k}{dt} \right] \Rightarrow U_j(p) = \sum L_{jk} (pI_k(p) + i_k(0))$$

$$U_j(p) = \sum_{k=1}^n pL_{jk} I_k(p) - \sum_{k=1}^n L_{jk} I_k(0)$$

$$E_{kL} = \sum_{k=1}^n L_{jk} I_k(0) \text{ - suma tensiunilor conditiilor initiale.}$$

Schema operationala echivalenta a bobinelor cuplate magnetic este:

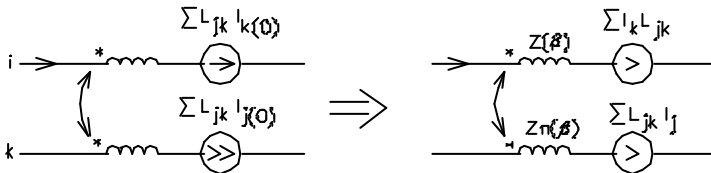


Fig.7.27

d. Condensatorul

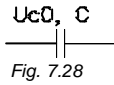


Fig. 7.28

Ecuatiilor din domeniul timp $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ sau $u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt + u_{c0}$, prin

aplicarea transformatei Laplace, le corespund urmatoarele ecuatii operationale:

$$I_c(p) = C[pU_c(p) - u_{c0}]$$

$$I_c(p) = pCU_c(p) - CU_c(0) \Rightarrow U_c(p) - \frac{u_{c0}}{p} = \frac{1}{pC} I_c(p)$$

$$U_c(p) = \frac{1}{C} \frac{I_c}{p} + \frac{u_{c0}}{p}; \quad U_c(p) = \frac{I_c}{pC} + \frac{u_{c0}}{p}; \quad -\frac{u_{c0}}{p} + U_c(p) = \frac{I_c}{pC} = Z_c(p) \cdot I_c(p)$$

$$-E_{c0} + U_c(p) = Z_c(p) \cdot I_c(p) \Rightarrow Z_c(p) = \frac{1}{pC}$$

Concluzii:

1° În aplicarea transformatei Laplace pentru elementele reactive trebuie determinate conditiile initiale înainte de comutare.

2° Raportul $\frac{\text{tensiune operationala}}{\text{curent operational}}$ se numeste impedanta operationala $Z(p)$.

Inversa impedantei operationale este admitanta operationala.

e. Aplicarea transformatei Laplace unui dipol ce admite schema echivalenta:

e1. Serie

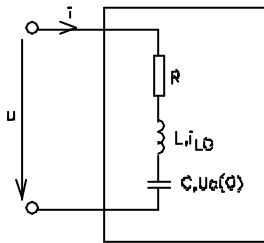


Fig. 7.25

Ecuatia tensiune-curent la bornele dipolului este:

$$u = u_R + u_c + u_L = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 idt + \frac{1}{C} \int_0^t idt$$

Aplicând

transformata Laplace rezulta:

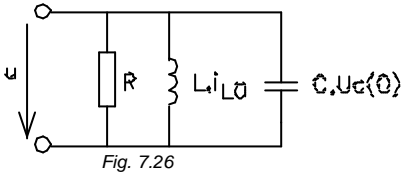
$$U(p) = I(p)R + pL(pI(p) - i_L(0)) + \frac{u_{c0}}{p} + \frac{1}{C} I(p) \text{ sau}$$

$$U(p) = I(p) \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) + \frac{u_{c0}}{p} - \underbrace{Li_L(0)}_{-E_{c0}}$$

Ecuatia Joubert atasata dipolului este:

$$E_{c0} + U(p) = Z(p)I(p) \quad \text{cu} \quad Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$$

e2. Paralel



Ecuatiei curent-tensiune a dipolului serie:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt + C \frac{du_c}{dt} \text{ sau}$$

$$i = \frac{u}{R} + \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt}_{i_L(0)} + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + C \frac{du_c}{dt}$$

aplicându-i transformata Laplace, conduce la urmatoarea relatie operationala:

$$I = \frac{U}{R} + \frac{i_{L0}}{p} + \frac{1}{pL} U + C[pU - u_{c0}], \text{ relatie ce poate fi restrânsa in forma :}$$

$$I = U \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{pL} + pC \right] + \frac{i_{L0}}{p} - C u_{c0}$$

Ecuatia Joubert în curent a unei laturi are forma: $i = \frac{e}{Z} + \frac{u_s}{Z} = i_g + y u_s$ ce admite

urmatoarea imagine operationala: $\mathbf{L}[i = i_g + y u_s]$; $I = I_g + YU$.

Identificând forma operationala a ecuatiei Joubert cu ecuatie operationala a circuitului rezulta: $I = YU + I_g$ cu $I_g = \frac{i_{L0}}{p} - C u_{c0}$.

7.3.2.2 Aplicarea transformatei Laplace în analiza circuitelor ce contin surse independente

Se considera circuitul din figura 7.27 ce functioneaza cu sursa de curent, sursa de tensiune fiind scurcircuitata. La momentul $t > 0$ se cupleaza sursa de tensiune e ($e = 5V$). Sa se determine variatia în timp a tensiunii v de pe rezistenta $1K\Omega$.

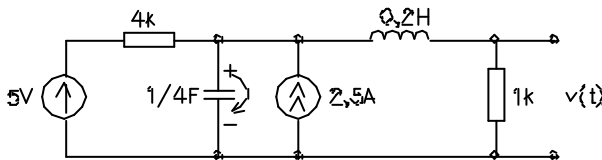


Fig.7.27

Rezolvarea circuitului implica determinarea conditiilor initiale pentru elementele reactive. Valorile marimilor de stare $i_L(0)$ si $u_C(0)$ rezulta din functionarea initiala $t < 0$ a circuitului.

În regimul stationar. ($t < 0$) elementele reactive sunt înlocuite prin comportamentul lor în c.c. iar circuitul are urmatoarea configuratie

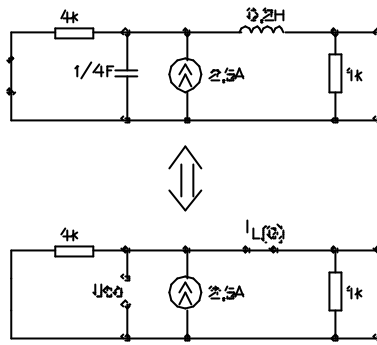


Fig.7.28.

Determinarea conditiilor initiale necesita rezolvarea circuitului din figura 7.28. In acest sens aplicam metoda reducerii circuitului la dipol echivalent. Aplicând divizorul de curent obținem curentul initial ce parcurge bobina : $i_L(0) = i_g \cdot \frac{4}{4+1} = 2,5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25}{10} \cdot \frac{4}{5} = 2A$

Tensiunea ce încarcă condensatorul poate fi considerata fie tensiunea de pe rezistenta de 1KΩ, fie tensiunea de pe rezistenta de 4KΩ obținând $u_c(0) = i_g \cdot R_e = 2,5 \cdot \frac{4}{5} = 2V$, $u_c(0) = i_{R4} \cdot R_4 = i_g \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 = 2,5 \cdot \frac{1}{5} \cdot 4 = 2V$.

Cunoscând condițiile initiale și reprezentându-le prin surse se obține circuitul de analizat, (fig.7.29), circuit analizat în regim tranzitoriu prin asocierea imaginii operationale.

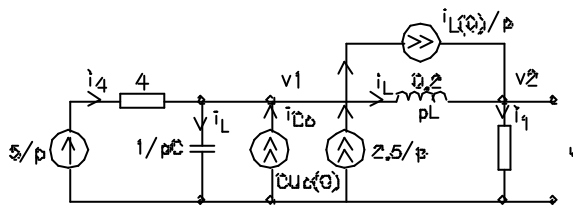


Fig.7.29.

In rezolvarea circuitului se aplica metoda potentialelor nodale rezultat al aplicării teoremei Kirchhoff I în nodul v_1 și v_2 :

$$-i_4 + i_c - i_{c0} - i_g + i_L + i_{L0} = 0,$$

$$-i_L - i_{L0} + i_1 = 0$$

relatii completeate cu $i_4 = \frac{5 - v_1}{4}$, $i_1 = \frac{v_2}{R_1}$, $i_L = \frac{v_1 - v_2}{pL}$, $i_c = \frac{v_1}{\frac{1}{pC}}$.

Forma operatională a ecuațiilor nodale este:

$$-\frac{\frac{5}{p}-v_1}{4} + \frac{v_1}{\frac{4}{p}} - \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{2,5}{p} + \frac{v_1-v_2}{p \cdot 0,2} + \frac{2}{p} = 0$$

$$\frac{v_1-v_2}{0,2p} - \frac{2}{p} + \frac{v_1}{1} = 0$$

Rezolvând sistemul de ecuații rezultă:

$$v_2 = \frac{2p^2 + 12p + 75}{p(p^2 + 6p + 25)}$$

Pentru determinarea funcției originale se deduc rădăcinile

$$p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-25} = -3 \pm j4 \begin{cases} -3+4j = p_1 \\ -3-4j = p_2 \end{cases}$$

Descompunerea în fracții simple a expresiei potențialului operational, necesită determinarea a trei coeficienți

$$v_2 = \frac{2p^2 + 12p + 75}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p-p_1} + \frac{c_3}{p-p_2}$$

Rezultat al calculelor matematice deducem următoarele valori ale coeficienților

$$c_1 = \frac{P(0)}{Q(0)} = \frac{75}{25} = 3, \quad c_2 = \frac{P(p_1)}{p(p-p_2)} = \frac{25}{16^2 + 12^2} 4(4-3j) = \frac{5}{4} e^{-j\frac{3}{4}}, \quad c_3 = \frac{5}{4} e^{+j\frac{3}{4}}$$

$$\text{Înlocuind în expresia potențialului operational } v_2 = \frac{3}{p} + \frac{5}{4} \cdot e^{-j\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{p+3-4j} + \frac{5}{4} \cdot e^{+j\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{p+3+4j}$$

se obține variația în domeniul timp a potențialului v_2 rezultat al aplicării transformatei

Laplace inverse $v_2(t) = 3 + \frac{5}{4} e^{-j\frac{3}{4}} \cdot e^{-(3-4j)t} + \frac{5}{4} e^{+j\frac{3}{4}} \cdot e^{-(3+4j)t}$; relație echivalentă cu

$$v_2(t) = 3 + 1,25e^{-3t} \cos\left(4t + \arctg\frac{3}{4}\right)$$

7.3..2.3. Aplicarea transformatei Laplace în circuitele ce contin surse dependente

Se considera pentru exemplificare circuitul din figura 7.30 ce funcționează cu întrerupătorul k (space) deschis. În momentul $t > 0$ este sunată rezistența de 2Ω . Să se determine variația în timp a curentului sursei de 8V.

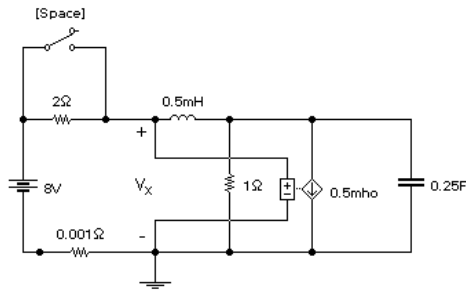


Fig. 7.30

Pentru rezolvare trebuie sa determinam conditiile initiale ale circuitului , circuit considerat la $t < 0$ (fig.7.31)

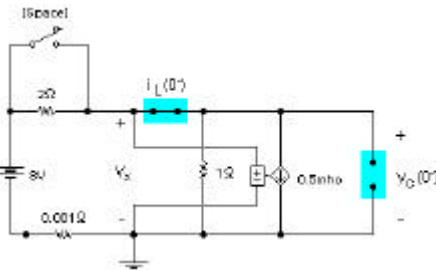


Fig.7.31

Aplicarea teoremei I Kirchhoff în circuitul din figura 7.31 conduce la

$$\frac{8 - v_x}{2} = \frac{v_x}{1} + \frac{v_x}{2} \text{ din care rezulta: } v_x = 2V .$$

Condițiile initiale sunt:

- $v_c(0^-) = v_x = 2V$;
- $i_L(0^-) = \frac{8 - v_x}{2} = 3A$;

Schema operationala a circuitului ,ținând cont de relatiile

$$C \cdot v_c(0^-) = \frac{1}{4} \times 2 = 0,5 ; \quad \frac{i_L(0^-)}{p} = \frac{3}{p} \text{ devine (fig7.32):}$$

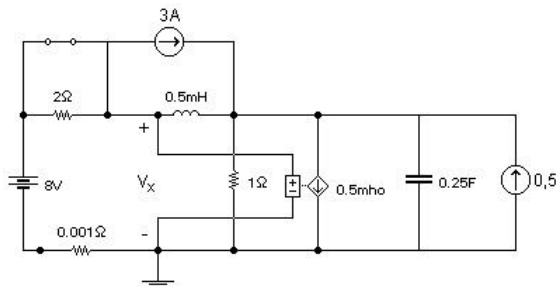


Fig. 7.32

Deoarece întrerupatorul este închis, $v_x(p) = 8/p$ iar rezolvare prin metoda potențialelor

$$\text{nodale conduce la : } \frac{3}{s} + \frac{\frac{8}{s} - v_1(s)}{0,5 \cdot s} + 0,5 = \frac{v_1(s)}{1} + \frac{8/s}{2} + \frac{v_1(s)}{4/s}$$

$$I(s) = \frac{\frac{8}{s} - v_1(s)}{0,5 \cdot s} + \frac{3}{s}$$

Eliminând $v_1(s)$ se obține imaginea operațională a curentului:

$$I(s) = \frac{3 \cdot s^2 + 24 \cdot s + 96}{s \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 8)} \quad \text{din care deducem variația în domeniul timp a acestuia:}$$

$$i(t > 0) = 3 \cdot [4 + \sqrt{10} \cdot e^{-2t} \cdot \cos(2t + 161,57^\circ)] \text{ A}$$