Grupuri. Inele. Corpuri

1. Calculați:

a) $5^{668} \pmod 7$ b) $3^{668} \pmod 7$

c) $5^{668} \pmod 6$ d) $3^{668} \pmod 6$

2. Arătați că dacă n este un număr natural impar și $3 \nmid n$, atunci $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$

3. Fie p un număr prim și $p \equiv 3 \pmod 4$. Atunci ecuația $x^2 \equiv -1 \pmod p$ nu are soluții.

4. Fie p un număr prim impar. Atunci

$$1^p + 2^p + \dots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod p$$

5. Aflați cel mai mic număr natural nenul n care împărțit la 9 dă restul 2 și împărțit la 11 dă restul 3.

6. Determinați cea mai mică soluție pentru sistemul:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7, & x \in \mathbb{N} \\ x \equiv 9 \pmod{12} \end{cases}$$

7. Fie $(G, \cdot, e)$ un grup și $x \in G$ un element de ordin m. Atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, ordinul elementului x^k este $\dfrac{m}{(m,k)}$, unde $(m,k) = \text{cmmdc}(m,k)$.

8. Aflați ordinele următoarelor elemente:

$\hat{14} \in (\mathbb{Z}_{20}, +)$, $\widehat{48} \in (\mathbb{Z}_{64}, +)$, $\widehat{15} \in (\mathbb{Z}_{1000}, +)$

9. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{47}$ ecuația $\hat{3}x = \hat{2}$.

10. Rezolvați în $\mathbb{Z}_{100}$ ecuația $\widehat{23}x = \hat{5}$

11. Scrieți tabla înmulțirii pentru corpurile cu 8 și cu 9 elemente.

12. Fie $(G, \circ, e)$ un grup comutativ și $x, y \in G$ având ordinele m, respectiv n. Dacă m și n sunt prime între ele, atunci elementul xy are ordinul $m \cdot n$

13. a) Aflați ordinele elementelor $\hat{2}$ și $\hat{3}$ din $(\mathbb{Z}_{73}^{*}, \cdot)$

b) Determinați în $(\mathbb{Z}_{73}^{*}, \cdot)$ un element de ordin 4 și un element de ordin 36

14. Determinați subgrupurile următoarelor grupuri:

a) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$; b) $U(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$; c) $U(\mathbb{Z}_{13}, \cdot)$; d) $(\mathbb{Z}_8, +)$

15. Fie $(R, +, \cdot, 0, 1)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in R$. Să se arate că:

a) $x + x = 0 \ (\forall) x \in R$

b) R este inel comutativ

c) Relația: $x \leq y \iff xy = x$ este o relație de ordine pe R

d) Dacă notăm $x \vee y = x + y + xy$, $x \wedge y = xy$, $\neg x = 1 + x$, atunci au loc relațiile:

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

$(x \vee y) \wedge x = x$

$(x \wedge y) \vee x = x$

$\neg(\neg x) = x$

$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$

$\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$

e) Dacă R este corp, atunci $R \simeq \mathbb{Z}_2$