Curs 1

Partea I

Mulţimi. Funcţii. Relaţii. Grafuri

I.1 Mulţimi

I.1.1 Noţiuni introductive

Conceptul de *mulţime* este fundamental în Matematică şi indispensabil în Computer Science. Acest concept abstractizeaza ideea de a grupa împreună obiecte şi de a le vedea ca o entitate de sine stătătoare.

Intuitiv, vom spune că o *mulţime* este o colecţie de obiecte distincte, numite *elementele* mulţimii[1].

Deci o mulţime este formată din obiecte, numite elementele mulţimii respective. Elementele unei mulţimi pot fi de orice natură: numere, persoane, litere ale alfabetului, sau chiar alte mulţimi, etc. Două elemente ale aceleiaşi mulţimi pot fi doar egale sau diferite (momentan nu ne interesează decât ca elemente ale mulţimii, fără orice altă structură).

Prin convenţie, vom nota mulţimile cu majuscule: A, B, C etc., iar elementele acestora cu litere mici: x, y, etc.

Ca exemple, să cosiderăm mulţimea studenţilor admişi la secţia Calculatoare în 2010, mulţimea culorilor curcubeului, mulţimea literelor alfabetului latin, etc. Dintre mulţimile importante în matematică, pe care le-am întâlnit deja în liceu, menţionăm următoarele:

- mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

[1] Aceasta a fost definiţia utilizată de matematicianul G. Cantor (1845-1918), fondatorul *Teoriei mulţimilor*.

- mulţimea numerelor întregi[2] $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.
- mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
- mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

Noţiunile de mulţime şi de element sunt legate prin relaţia de *apartenenţă*: dacă A este o mulţime şi x un obiect al mulţimii, spunem că x aparţine lui A şi scriem $x \in A$[3]. În cazul în care obiectul x nu este un element al mulţimii A vom nota $x \notin A$. De exemplu, 1 aparţine mulţimii $\{1, 2, alb, \{3, 4\}\}$, dar 3 şi 4 nu aparţin; elementele mulţimii sunt numerele $1, 2$, şirul de caractere *alb* şi mulţimea $\{3, 4\}$.

O mulţime poate fi specificată prin listarea tuturor elementelor sale între acolade, cum ar fi mulţimea cifrelor pare $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. De remarcat că ordinea în care apar elementele mulţimii într-o asemenea scriere nu contează, în sensul că $\{8, 2, 4, 0, 6\}$ este aceeaşi mulţime ca mai sus. De asemenea, repetiţia elementelor este irelevantă: $\{a, b, b\}$ şi $\{a, b\}$ reprezintă aceeaşi mulţime (vom vorbi în Cursul 2 despre multiseturi, mulţimi în care repetiţiile sunt permise).

Convenim că există o unică[4] mulţime fără elemente, numită *mulţimea vidă* şi notată $\emptyset$ sau $\{\}$. Nu se disting diferite mulţimi vide dupănatura diferită a elementelor a căror absenţă o avem în vedere. De exemplu, mulţimea soluţiilor naturale ale ecuaţiei $2x + 1 = 0$, mulţimea punctelor comune unei perechi de drepte paralele sau mulţimea punctelor din plan ale căror coordonate satisfac ecuaţia $x^2 + y^2 + 1 = 0$ reprezintă una şi aceeaşi mulţime vidă. O mulţime poate fi vidă (nu conţine nici un obiect) sau nu; dacă nu este vidă, putem găsi cel puţin un obiect care să-i aparţină.

Însă descrierea mulţimilor prin listarea elementelor între acolade nu este întotdeauna eficientă; exemple ar fi mulţimea numerelor raţionale sau mulţimea numerelor reale; în acest caz se preferă descrierea mulţimii prin precizarea unei proprietăţi P, comune tuturor elementelor sale. Scriem astfel:

$$A = \{x \in B \mid P(x)\}$$

De exemplu, mulţimea $\{\frac{1}{2}, 2\}$ poate fi descrisă prin $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$; mulţimea punctelor de pe cercul unitate prin $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, iar

[2]Notaţia provine din limba germană, de la cuvântul *zahlen*(numere).

[3]Simbolul $\in$, utilizat pentru a indica relaţia de apartenenţă, a fost introdus de matematicianul italian G. Peano (1858-1932) în 1888 şi provine din litera ϵ (epsilon) a alfabetului grec.

[4]Două mulţimi sunt egale dacă au aceleaşi elemente. Dacă ar exista două mulţimi vide şi ar fi diferite, atunci ar exista cel puţin un obiect care ar aparţinĕ uneia şi nu şi celeilalte, fals.

mulţimea numerelor întregi pare prin $\{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Dar atenţie: nu orice proprietate poate conduce la o mulţime! Pentru a vedea aceasta, este suficient să considerăm M mulţimea tuturor mulţimilor care nu se conţin pe ele însele ca elemente: $M = \{A \mid A \text{ mulţime şi } A \notin A\}$. Dar cum poate o mulţime să se conţină pe sine însăşi? De exemplu, mulţimea tuturor noţiunilor abstracte este la rândul său o noţiune abstractă. Mult mai uşor este să găsim exemple de mulţimi care nu se conţin, cum ar fi mulţimea numerelor naturale, mulţimea literelor alfabetului, mulţimea vidă (cum mulţimea vidă nu are nici un element, în particular rezultă că nu se conţine nici pe sine). Deci am împărţit astfel mulţimile în două: mulţimile care se conţin pe sine însăşi şi cele care nu. Apare în mod natural întrebarea: dar mulţimea M se conţine pe sine ca element? Dacă răspunsul este afirmativ, atunci M este un element al său. Dar elementele lui M sunt exact mulţimile care nu se conţin pe sine însăşi, deci $M \notin M$, contradicţie. Deci M nu se conţine pe sine însăşi. Însă atunci prin definiţie, M este un element al său, fals. Am ajuns astfel la un paradox [5], generat de presupunerea că M este o mulţime[6]. În teoria naivă a mulţimilor, situaţia de mai sus nu este permisă şi nu vom considera asemenea cazuri în cadrul acestui curs.

Acest tip de paradox a condus la un studiu amănunțit al fundamentelor teoriei mulțimilor. A. N. Whitehead și B. Russell, în lucrarea *Principia Mathematica*, au dezvoltat o teorie a mulțimilor bazată pe o ierarhie, ale căror nivele le-au numit *tipuri*[7]. Astfel, cel mai de jos nivel (tip) conține doar elemente individuale. Orice alt tip conține doar mulțimi ale căror elemente provin doar din nivelul imediat inferior. Se obține astfel o ierarhie a tipurilor $T_0, T_1, \ldots, T_k, \ldots$, unde T_0 este nivelul minim ce conține doar elemente, iar T_{k+1} este tipul ale cărui mulțimi au elementele in T_k. Deci în această teorie, o mulțime se regăsește exact într-un singur tip T_k, unde $k \geq 1$. În consecință, putem spune că $A \notin A$ pentru orice mulțime construită astfel: dacă A este o mulțime de tipul T_{k+1}, elementele lui A sunt de tipul T_k. Dacă presupunem $A \in A$, am obține că și A este de tipul T_k, deci s-ar regăsi simultan în tipurile T_k și T_{k+1}, imposibil, căci fiecare mulțime aparține exact unui singur tip. Paradoxul lui Russel nu poate avea loc în această teorie a tipurilor: cum $A \notin A$ pentru orice mulțime A, definiția lui M devine $\{A \mid A \text{ este o mulțime }\}$, adică M conține toate mulțimile. Dar M nu poate fi o mulțime în teoria tipurilor, deoarece conține mulțimi de tipuri diferite. Pentru ca M să fie o mulțime în accepțiunea teoriei tipurilor, ar trebui să conțină doar mulțimi de același tip. De exemplu, construcția $M = \{A \mid A \text{ este o mulțime de tipul } T_K\}$ este perfect valabilă și definește o mulțime de tipul T_{k+1}. În particular, rezultă $M \notin M$, dar aceasta nu mai reprezintă o contradicție.

În Computer Science, se întâlneşte uneori şi o a treia variantă de specifi-

[5] Paradox celebru din 1901, datorat matematicianului şi filosofului britanic B. Russel (1872-1970), fondatorul teoriei tipurilor din Computer Science.

[6] Dar aceasta nu înseamnă că nu există mulţimi având drept elemente alte mulţimi - de exemplu mulţimea părţilor.

[7] În Computer Science, teoria tipurilor este fundamentală în construcţia algoritmilor de verificare formală a limbajelor de programare.

care a unei mulţimi, prin *recursivitate*. Vom da numai un exemplu în acest sens: fie A mulţimea numerelor naturale pare mai mari decât 3; atunci A poate fi descrisă astfel:

(i) $4 \in A$.

(ii) Dacă $x \in A$, atunci $x + 2 \in A$.

(iii) Nici un alt element nu aparţine lui A.

O mulţime este complet determinată de elementele sale. Aceasta înseamnă că două mulţimi sunt egale când au exact aceleaşi elemente:

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

Putem merge mai departe în compararea a două mulţimi, şi anume vom spune că o mulţime A este *inclusă* într-o mulţime B şi scriem $A \subseteq B$ dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B:

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

Rezultă că $A \nsubseteq B \Longleftrightarrow (\exists x \in A$ şi $x \notin B)$. De exemplu, avem incluziunile $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ sau $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, dar $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Z}$. Mulţimea vidă este inclusă în orice altă mulţime (de ce?). Se verifică imediat următoarele proprietăţi ale relaţiei de incluziune:

$$A \subseteq A \text{ pentru orice mulţime } A \ (\textit{reflexivitate})$$
$$A \subseteq B \text{ şi } B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C \text{ pentru orice mulţimi } A, B, C \ (\textit{tranzitivitate})$$

Submulţimile unei mulţimi date A formează la rândul lor o mulţime, numită *mulţimea părţilor* lui A şi notată $\mathcal{P}(A)$ sau $\mathbf{2}^A$ (vom justifica această notaţie exponenţială când vom discuta despre funcţii). În particular, aceasta conţine mulţimea vidă şi mulţimea A însăşi (deci este nevidă). De exemplu, $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Observaţi că $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ (a nu se confunda cu mulţimea vidă!), iar $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Exerciţiul I.1.1.1. *Arătaţi că două mulţimi A şi B sunt egale dacă şi numai dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$.*

I.1.2 Operaţii elementare cu mulţimi

În continuare vom presupune fixată o mulţime universală M, în sensul că toate mulţimile cu care vom lucra în această secţiune vor fi incluse în M.

Reuniunea mulţimilor A şi B este mulţimea acelor elemente (din M) ce aparţin fie lui A, fie lui B (sau amândorura):

$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

Intersecţia mulţimilor A şi B este mulţimea acelor elemente (din M) ce aparţin atât A cât şi lui B:

$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$$

Dacă $A \cap B = \emptyset$, spunem că A şi B sunt *disjuncte*.
Atât reuniunea cât şi intersecţia pot fi reprezentate sugestiv cu ajutorul diagramelor Venn[8], ca în Figurile 1 şi 2:

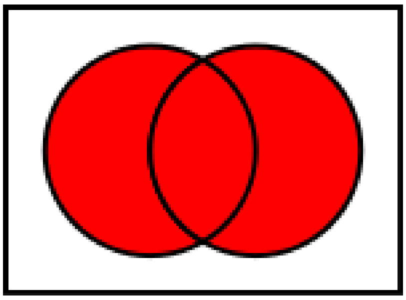

Figura 1: $A \cup B$

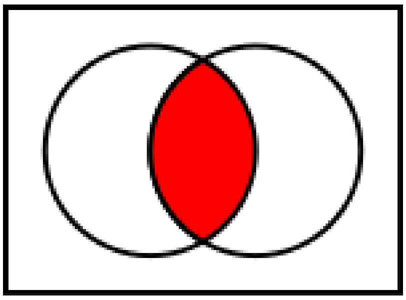

Figura 2: $A \cap B$

Mai general, se poate defini reuniunea unei familii arbitrare nevide $\mathcal{F}$ de mulţimi ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P})(M)$), prin

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{F}, x \in A$$

respectiv intersecţia prin

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{F}, x \in A$$

Dacă $\mathcal{F} = \emptyset$, prin convenţie, vom considera mulţimea vidă drept reuniune şi mulţimea universală M drept intersecţie.

Complementara unei mulţimi $A \subseteq M$ este mulţimea acelor elemente din M care nu sunt în A:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

Complementara unei mulţimi este reprezentată în Figura 3 printr-o diagramă Venn.

Proprietăţi algebrice ale operaţiilor cu mulţimi:

[8] J. Venn(1834 1923), matematician britanic.

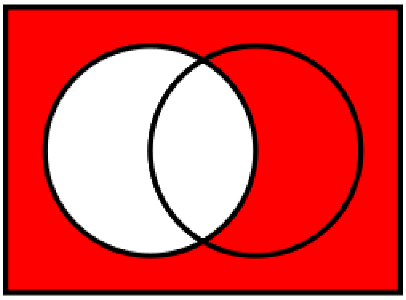

Figura 3: A^c

Asociativitate

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Comutativitate

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Idempotenţă

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Absorbţie

$A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

Modularitate

Dacă $A \subseteq C$, atunci $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

Distributivitate

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Mulţimea vidă sau legea contradicţiei

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

Mulţimea universală sau legea terţului exclus

$A \cup M = M$

$A \cap M = A$

Complementaritate

$A \cup A^c = M$

$A \cap A^c = \emptyset$

Involuţie

$(A^c)^c = A$

Legile lui de Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

De exemplu, să demonstrăm una din cele două proprietaţi de absorbţie: dacă $x \in A \cap (A \cup B)$, atunci în particular $x \in A$. Reciproc, dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cap B$, deci şi $x \in A \cap (A \cup B)$.

De remarcat că în afara proprietăţii de modularitate, toate celelalte apar în perechi; de fapt, există o dualitate în sensul că orice identitate în care apar operaţiile de intersecţie şi reuniune rămâne adevărată dacă $\cup$ şi $\cap$ sunt interschimbate. Acest fapt este datorat legilor lui de Morgan şi proprietăţii de involuţie. Pentru exemplificare, să arătăm a doua lege de absorbţie, plecând de la prima (pe care am demonstrat-o anterior):

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= ((A \cup (A \cap B))^c)^c \\ &= (A^c \cap (A^c \cup B^c))^c \\ &= (A^c)^c \\ &= A \end{aligned}$$

Operaţiile de reuniune şi intersecţie amintesc de adunarea şi înmulţirea numerelor întregi, iar complementara unei mulţimi de opusul unui număr în raport cu adunarea, cu toate că nu satisfac chiar toate aceleaşi proprietăţi (de exemplu, $A \cup A = A$ pentru orice mulţime A, în timp ce $a + a = a$ doar pentru $a = 0$). Totuşi, aşa cum adunarea şi înmulţirea determină o structură algebrică (de inel comutativ) pe $\mathbb{Z}$, la fel se întâmplă şi cu $\mathcal{P}(M)$, împreună cu operaţiile $\cup, \cap, ()^c$. O mulţime înzestrată cu două operaţii binare şi o operaţie unară satisfăcând proprietăţile de mai sus se numeşte *algebră booleană*[9]. Deci, mulţimea părţilor $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, ()^c)$ este o algebră booleană. Asupra algebrelor booleene, cu mai multe detalii şi exemple, vom reveni în cursurile următoare. Un caz particular important se obţine dacă mulţimea M conţine doar un singur element:

[9]Studiul algebric al mulţimii părţilor şi legătura acesteia cu raţionamentele logice au fost iniţiate de matematicianul britanic G. Boole (1815-1864)

Exemplul I.1.2.1. *Fie* $M = \{a\}$. *Atunci* $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}\}$. *Dacă notăm* $\emptyset$ *cu* 0 *şi* $\{a\}$ *cu* 1, *atunci tablele operaţiilor de reuniune, intersecţie şi complementară vor fi:*

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$()^c$	
0	1
1	0

*Remarcăm că acestea coincid cu tabelele de adevăr din calculul propoziţional, unde în loc de reuniune avem disjuncţia (*sau $\vee$*), intersecţia este înlocuită de conjuncţie (*şi $\wedge$*), iar complementara devine negaţie (*$\neg$*). Scrieţi tabla de adevăr pentru implicaţie şi determinaţi operaţia cu (sub)mulţimi corespunzătoare. (Indicaţie:* $A^c \cup B$*). Scrieţi şi tabla operaţiei diferenţă simetrică. Puteţi identifica corespondentul din calculul propoziţional?*

Identităţile între mulţimi, în care apar operaţii elementare de tipul reuniune, intersecţie, complement, pot fi verificate şi cu ajutorul tablelor de adevăr privind apartenenţa: de exemplu, să arătăm prima lege a lui de Morgan:

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

I.1.3 Produs cartezian

Intuitiv, o pereche ordonată de obiecte este o colecţie formată cu două obiecte astfel încât unul dintre acestea este desemnat prima componentă iar celălalt a doua (ultima) componentă. Proprietatea fundamentală ce stă la baza noţiunii de pereche ordonată este aceea de egalitate: două perechi ordonate sunt egale dacă şi numai dacă primele componente, respectiv ultimele componente coincid.

Fiind date două obiecte x şi y, se numeşte *pereche ordonată* a obiectelor x şi y mulţimea notată (x, y)[10] şi definită prin

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Dacă $x \neq y$, atunci (x, y) este o mulţime cu două elemente: o mulţime cu un element $\{x\}$ şi o mulţime cu două elemente (o pereche neordonată) $\{x, y\}$. Prima componentă a perechii (x, y) se obţine din din $\{x\}$, iar a doua componentă din $\{x, y\} \setminus \{x\}$. În cazul $x = y$, atunci $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$

[10] Kuratowski, 1921.

şi $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$ şi cele dou ua componente coincid. Deci ambele componente pot fi unic determinate pornind de la mulţimea (x, y). Mai precis, are loc următorul rezultat:

Propoziţia I.1.3.1. *$(x, y) = (x', y')$ dacă şi numai dacă $x = x'$ şi $y = y'$.*

Demonstraţie. Dacă $x = x'$ şi $y = y'$, atunci clar $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = (x', y')$.

Implicaţia inversă este însă un pic mai laborioasă. Să presupunem deci că $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$. Dacă $x \neq y$, atunci neapărat $\{x\} = \{x'\}$ şi $\{x, y\} = \{x', y'\}$ (mulţimea cu două elemente $\{x, y\}$ nu poate fi egală cu $\{x'\}$, o mulţime cu un singur element). Din $\{x\} = \{x'\}$ rezultă $x = x'$; apoi, $\{x, y\} = \{x', y'\}$ şi $x = x'$ implică $y = y'$.

Dacă $x = y$, atunci $(x, y) = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}\} = (x', y')$, de unde $\{x\} = \{x'\} = \{x', y'\}$. Din acest şir de egalităţi rezultă $x = x' = y'$, deci vom avea şi $x = x'$ şi $y = y'$. $\square$

Exerciţiul I.1.3.2. *Arătaţi că $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x, y\}))$.*

Dacă A şi B sunt două mulţimi, mulţimea

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

se va numi *produsul cartezian* al mulţimilor A şi B.

Prin convenţie, produsul cartezian al oricărei mulţimi cu mulţimea vidă este mulţimea vidă: $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Dacă A, B, C sunt trei mulţimi, vom defini produsul lor cartezian prin egalitatea: $A \times B \times C = (A \times B) \times C$. Elementul $((x, y), z)$ din $A \times B \times C$ îl vom nota mai simplu prin (x, y, z). Mai general, dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n (n \geq 3)$ sunt mulţimi, punem $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = ((\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n)$. În cazul în care toate mulţimile din produs coincid, ca în $A \times A$, notăm produsul prin A^2, $A \times A \times A$ prin A^3, etc. Asemenea produse sunt familiare din geometria analitică: un punct pe o dreaptă poate fi identificat cu un număr real; punctele planului sunt unic determinate de perechi de coordonate, adică de elemente din $\mathbb{R}^2$, etc. Prin convenţie, produsul cartezian al unei familii vide de mulţimi este o mulţime cu un singur element, în timp ce produsul cartezian al unei familii conţinând o singură mulţime este chiar mulţimea respectivă.

I.1.4 Multiseturi

În matematică, noţiunea de *multiset*[11] este o generalizare a noţiunii de mulţime, în sensul că dacă pentru mulţimi, repetiţia elementelor nu este luată

[11]Sau *bag*, în limba engleză. Termenul *multiset* a apărut în anii '70, deşi multiseturile au fost utilizate încă din secolul XIX.

în considerare, într-un multiset un element poate avea duplicate. Ideea de plecare este următoarea: fie M o mulţime (universală). Atunci am văzut că o mulţime $A \subseteq M$ poate fi specificată prin enumerarea elementelor sale, printr-o proprietate satisfăcută de elementele sale $A = \{x \in M \mid P(x)\}$, sau prin funcţia sa caracteristică (vezi Curs 2)

$$\chi_A : M \longrightarrow \{0,1\},\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

în sensul că valoarea 1 indică apartenenţa la mulţimea A. Dacă mulţimea $\{0,1\}$ este înlocuită cu mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, se obţine noţiunea de multiset. Formal, un *multiset* A este o pereche (M, χ_A), unde M este o mulţime nevidă şi $\chi_A : M \longrightarrow \mathbb{N}$ este o funcţie cu valori în mulţimea numerelor naturale. Mulţimea M este *baza* multisetului, mulţimea

$$supp(A) = \{x \in M \mid \chi_A(x) > 0\}$$

se numeşte *mulţimea suport* a multisetului, iar pentru $x \in M$, numărul $\chi_A(x)$ este numit *multiplicitatea* lui x în multisetul A.

Altfel formulat, un multiset A în M este o mulţime de perechi $\{(x, \chi_A(x)) \mid x \in M$ şi $\chi_A(x) \in \mathbb{N}\}$, unde $\chi_A(x)$ indică numărul de apariţii (de repetări ale lui x în A.

Un exemplu de multiset des întâlnit în teoria clasică a probabilităţilor este urna cu bile de mai multe culori. Aici mulţimea M este mulţimea culorilor bilelor din urnă, iar funcţia m indică câte bile de fiecare culoare se găsesc în urnă.

Un alt exemplu, poate cel mai simplu şi natural din punct de vedere matematic, este multisetul factorilor primi ai unui număr natural nenul $n \geq 2$. Mulţimea suport M este mulţimea numerelor prime (sau mulţimea divizorilor primi ai lui n, dacă nu dorim şi multiplicitatea zero), iar funcţia m indică puterea la care aceşti factori primi apar în descompunerea lui N. De exemplu, 120 se descompune în $120 = 2^3 3^1 5^1$, care conduce la multisetul $\{2, 2, 2, 3, 5\}$.

În clasele de liceu, rezolvarea ecuaţiilor polinomiale conduce la multiseturi de soluţii, în care fiecare rădăcină apare de un număr de ori egal cu multiplicitatea sa.

În continuare, vom presupune că toate multiseturile vor avea aceeaşi mulţime bază M.

Fie A un multiset. Spunem că $x \in M$ *aparţine* multisetului A dacă $\chi_A(x) > 0$ şi scriem $x \in_A$. Două multiseturi A şi B cu aceeaşi mulţime bază M sunt egale dacă $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ pentru orice $x \in M$. În particular, rezultă că şi mulţimile suport vor fi egale $supp(A) = supp(B)$.

Exerciţiul I.1.4.1. *Este adevărat şi reciproc? Daţi un exemplu.*

Observaţia I.1.4.2. *Să considerăm următoarele exemple, văzute ca*

- *Mulţimi:*
$$\{a, b, c, c\} = \{c, a, b, c\} = \{a, b, c\}$$

- *Multiseturi:*
$$\{a, b, c, c\} = \{c, a, b, c\} \neq \{a, b, c\}$$

Deci într-un multiset nu contează ordinea, dar sunt permise repetiţiile.

Fie A şi B două multiseturi. Spunem că A este un submultiset al lui B, $A \subseteq B$, dacă $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ pentru orice $x \in M$. Dacă $A \subseteq B$, atunci şi $supp(A) \subseteq supp(B)$, dar nu şi invers.

Vom numi *multiset vid* $\emptyset$ (cu baza M) multisetul dat de funcţia de multiplicitate $\chi_\emptyset(x) = 0$, $\forall x \in M$.

Noţiunile de intersecţie, reuniune, diferenţă, produs cartezian şi cardinalitate a unui multiset se obţin prin generalizarea celor pentru mulţimi. Astfel,

(i) $A \cup B$ este multisetul definit prin $\chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$. Aceasta înseamnă că pentru un obiect $x \in M$, reuniunea multiseturilor va conţine pe x cu o multiplicitate egală cu cea mai mare dintre multiplicităţile cu care x apare în A sau în B. De exemplu, dacă $A = \{2, 3, 4, 4\}$ şi $B = \{1, 4, 3, 3\}$, atunci $A \cup B = \{1, 2, 3, 3, 4, 4\}$. Să remarcăm că $A, B \subseteq A \cup B$.

(ii) Similar, $A \cap B$ va fi definit prin $\chi_{A\cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$. În particular, au loc relaţiile $A \cap B \subseteq A$ şi $A \cap B \subseteq B$.

(iii) $A \setminus B$ este multisetul cu funcţia de multiplicitate $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$. De remarcat de exempplu că $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ nu mai rămâne neapărat adevărată: pentru $A = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2\}$ şi $B = \{1, 1, 2, 2, 2\}$, atunci $A \setminus B = \{1, 1, 2, 2\} \subseteq B$.

I.1.5 Mulţimi fuzzy

Pe lângă multiseturi, o altă generalizare a mulţimilor o constituie *mulţimile fuzzy* [12].

[12] Mulţimile fuzzy (vagi, în terminologia utilizată în unele lucrări româneşti) au fost introduse de matematicianul de origine azerbaigiană L. A. Zadeh (n. 1921) în anii '60 în corelare cu teoria logicii nuanţate a lui Lukasiewicz, în care propoziţiile nu sunt pe de-a întregul adevărate sau pe de-a întregul false.

O mulţime fuzzy este o mulţime fără o limită definită clar. Poate conţine elemente doar cu un grad parţial de apartenenţă.

O mulţime clasică este un recipient care include sau exclude total orice element dat. De exemplu, mulţimea zilelor săptămânii este $\{$luni, marţi, miercuri, joi, vineri, sâmbătă, duminică$\}$. Dar week-end-ul este un exemplu de mulţime fuzzy: putem afirma fără nici o urmă de îndoială că sâmbătă este o zi a week-endului, dar că vineri este o zi de week-end în proporţie de 0.7 (în cea mai mare parte da, dar nu în totalitate), iar duminică este o zi de week-end cu ponderea de 0.95 (da, dar nu la fel de mult ca sâmbată).

O *mulţime fuzzy* A este o pereche (M, χ_A), unde M este o mulţime nevidă şi $\chi_A : M \longrightarrow [0, 1]$ este o funcţie cu valori în intervalul închis $[0, 1]$. Mulţimea M este *baza* mulţimii fuzzy, iar mulţimea

$$supp(A) = \{x \in M \mid \chi_A(x) > 0\}$$

se numeşte *mulţimea suport* a mulţimii fuzzy, pentru $x \in M$, numărul real $\chi_A(x)$ este numit *ponderea* lui x în mulţimea fuzzy A.

Fiecare element din mulţimea (universală) M are un anumit grad de apartenenţă, cuprins între 0 şi 1, într-o mulţime fuzzy dată A. O mulţime fuzzy A este specificată prin listarea elementelor din bază, împreună cu ponderea acestora (elementele de pondere 0 de obicei nu se mai scriu).

Ca pentru mulţimi şi multiseturi, putem considera operaţii cu mulţimi fuzzy; de exemplu, complementara unei mulţimi fuzzy A este mulţimea fuzzy A^c, în care gradul de apartenenţă al unui element x este $1 - \chi_A(x)$. Reuniunea a două mulţimi fuzzy $\chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x)$, iar intersecţia $\chi_{A\cup B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$.