Curs 3

I.3 Relaţii binare

I.3.1 Definiţii; matricea asociată unei relaţii

Definiţia I.3.1.1. *Fie X şi Y două mulţimi. O* relaţie *binară R între X şi Y este o submulţime a produsului cartezian $R \subseteq X \times Y$ (X se numeşte domeniul relaţiei şi Y codomeniul).*

Pentru $(x, y) \in R$ mai scriem şi xRy. Dacă $X = Y$ spunem că R este o relaţie pe mulţimea X.
Mulţimea relaţiilor între X şi Y este $Rel(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ (în particular, dacă $|X| = m$ şi $|Y| = n$, atunci $|Rel(X, Y)| = 2^{mn}$).

Exemplul I.3.1.2. *(i) Fie X mulţimea studentilor din seria CC, Y mulţimea literelor din alfabetul latin şi relaţia R dată prin $xRy \iff$ litera $y \in Y$ se găseşte în numele de familie al studentului $x \in X$.*

(ii) Fie X o mulţime nevidă. Pe X putem defini întotdeauna trei relaţii, numite canonice, după cum urmează:

- $\emptyset$ *- relaţia vidă.*
- $X \times X$ *- relaţia universală.*
- $E_X = \{(x, x) | x \in X\}$ *- relaţia de egalitate.*

(iii) Fie $f : X \longrightarrow Y$ o funcţie, atunci $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ este o relaţie (graficul funcţiei f). La fel, dacă $f : A \subseteq X \longrightarrow Y$ este o funcţie parţială, putem construi relaţia asociată prin $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times Y \subseteq X \times Y$. În acest sens, putem spune că funcţiile parţiale generalizează funcţiile, iar relaţiile generalizează funcţiile parţiale.

(iv) Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ considerăm relaţia $xRy \iff x^2 + y^2 = 4$. Atunci perechea (x, y) este în relaţia R dacă şi numai dacă punctul de coordonate (x, y) aparţine cercului cu centrul în origine şi rază 2.

Fie X, Y două mulţimi finite, cu $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ şi $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Fiecărei relaţii $R \subseteq X \times Y$ îi putem asocia o matrice $\mathcal{M}_R = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, dacă } x_i R y_j \\ 0 & \text{, în caz contrar} \end{cases}$$

De exemplu, pentru cele trei relaţii canonice pe o mulţime X finită cu n elemente, se verifică uşor că matricile asociate sunt $\mathcal{M}_\emptyset = \mathbf{0}_n$, $\mathcal{M}_{X\times X} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ şi $\mathcal{M}_{E_X} = \mathbf{I}_n$. De asemenea, dacă $f : X \longrightarrow Y$ este o funcţie, atunci matricea asociată relaţiei R_f va conţine pe fiecare linie o singură valoare 1 (corespunzătoare elementului $y = f(x)$) şi restul 0.

Exemplul I.3.1.3. *Fie* $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ *şi* $xRy \Longleftrightarrow 3 \mid 2x - y$. *Atunci matricea asociată va fi* $\mathcal{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

I.3.2 Operaţii cu relaţii

Fie $R, R' \subseteq X \times Y$. Cum relaţiile sunt submulţimi ale produsului cartezian, au sens noţiunile de reuniune, intersecţie şi complementară, şi anume:

(i) Reuniunea $x(R \cup R')y \Longleftrightarrow xRy$ sau $xR'y$.

(ii) Intersecţia $x(R \cap R')y \Longleftrightarrow xRy$ şi $xR'y$.

(iii) Complementara $xR^c y \Longleftrightarrow x \not R\, y$

Corespunzător vom avea şi operaţii cu matricile asociate (pentru mulţimi X, Y finite!), cu observaţia că toate calculele se fac în $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$

În plus faţă de operaţiile menţionate mai sus, putem asocia fiecărei relaţii R relaţia opusă $R^{op} \subseteq Y \times X$, definită prin $yR^{op}x \Longleftrightarrow xRy$. (Ce se poate spune dacă R şi R^{op} sunt funcţii?)

Compunerea relaţiilor. Fie $R \subseteq X \times Y$, $R' \subseteq Y \times Z$. Definim compunerea relaţiilor R şi R' prin $x(R' \circ R)z \Longleftrightarrow \exists y \in Y,$ astfel încât xRy şi $yR'z$. Pentru mulţimi finite, compunerea relaţiilor revine la înmulţirea matricilor asociate (tot în $\mathbb{B}$).

Proprietăţi ale compunerii relaţiilor

(i) Compunerea relaţiilor este asociativă: dacă $R \subseteq X \times Y$, $R' \subseteq Y \times Z$, $R'' \subseteq Z \times U$, atunci $(R'' \circ R') \circ R = R'' \circ (R' \circ R)$.

(ii) Compunerea cu relaţia de egalitate: dacă $R \subseteq X \times Y$ şi E_X, respectiv E_Y sunt relaţiile de egalitate pe mulţimile X şi Y, atunci $R \circ E_X = E_Y \circ R = R$.

(iii) $(R' \circ R)^{op} = (R')^{op} \circ R^{op}$.

Propoziţia I.3.2.1. *Mulţimea relaţiilor pe X formeaza un monoid (cu involuţie) $(Rel(X), \circ, E_X, (-)^{op})$.*

Proprietăţi ale relaţiilor. Fie R o relaţie pe o mulţime X. Spunem că R este:

(i) Reflexivă, dacă $xRx, \forall x \in X$.

(ii) Simetrică, dacă $xRy \Longleftrightarrow yRx, \forall x, y \in X$.

(iii) Antisimetrică, dacă $xRy, yRx \Longrightarrow x = y$.

(iv) Tranzitivă, dacă $xRy, yRz \Longrightarrow xRz$.

Exemplul I.3.2.2. *(i) Pe $X = \mathcal{P}(M)$, relaţia de incluziune $R = \subseteq$ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.*

(ii) Pentru orice mulţime X, relaţia $R = \{(x, y) \mid x \neq y\}$ este simetrică, dar nu reflexivă sau tranzitivă.

Observaţia I.3.2.3. *(i) R reflexivă $\Longleftrightarrow E_X \subseteq R \Longleftrightarrow E_X \cap R = E_X \Longleftrightarrow E_X \cup R = R$.*

(ii) R simetrică $\Longleftrightarrow R = R^{op}$.

(iii) R antisimetrică $\Longleftrightarrow R \cap R^{op} \subseteq E_X$.

(iv) R tranzitivă $\Longleftrightarrow R^2 \subseteq R$.

Exerciţiul I.3.2.4. *(i) R simetrică $\Longrightarrow R^c$ simetrică.*

(ii) Fie X o mulţime cu n elemente. Câte relaţii reflexive / simetrice / antisimetrice / de echivalentă există pe mulţimea X?

I.3.3 Relaţii de ordine

Definiţia I.3.3.1. *Fie X o mulţime. O relaţie R se numeşte* relaţie de ordine *pe X dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Perechea (X, R) se numeşte* mulţime parţial ordonată (poset).

În continuare, vom nota relaţia de ordine cu $\leq$ în loc de R.

Exemplul I.3.3.2. *(i) Relaţia de egalitate E_X este o relaţie de ordine pe orice mulţime X.*

(ii) Mulţimea numerelor reale cu relaţia de ordine uzuală $(\mathbb{R}, \leq)$, mulţimea numerelor naturale nenule cu relaţia de divizibilitate $(\mathbb{N}^*, |)$, mulţimea părţilor unei mulţimi cu relaţia de incluziune $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sunt exemple de poseturi pe care le-am întâlnit încă din liceu.

Fie $(X, \leq)$ şi $(Y, \leq)$ două poseturi. O funcţie $f : X \longrightarrow Y$ se numeşte *morfism de poseturi* dacă pentru orice $x, x' \in X$ cu $x \leq x'$, avem $f(x) \leq f(x')$ (deci un morfism de poseturi este o funcţie care păstrează relaţia de ordine; este o funcţie monotonă). Spunem că două poseturi $(X, \leq)$ şi $(Y, \leq)$ sunt *izomorfe* dacă există două morfisme $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ astfel încât $f \circ g = \mathbf{1}_Y$, $g \circ f = \mathbf{1}_X$. În particular, rezultă f, g bijective şi $g = f^{-1}$.

Exerciţiul I.3.3.3. *Dacă $f : X \longrightarrow Y$ este un morfism de poseturi bijectiv, rezultă că şi inversa sa f^{-1} este un morfism de poseturi?*

Fie $(X, \leq)$ un poset. Atunci există mai multe relaţii asociate relaţiei de ordine pe X: $x \geq y$ (opusa relaţiei iniţiale), $x = y$, $x < y$ (definită prin $x \leq y$ şi $x \neq y$), $x > y$ (opusa relaţiei precedente), sau chiar relaţia "x,y incomparabile" (formal, aceasta este complementara reuniunii relaţiilor $\leq$, $\geq$, $=$, $<$, $>$). Pe lângă acestea vom introduce acum o nouă relaţie, relaţia de acoperire:

Definiţia I.3.3.4. *Fie $(X, \leq)$ un poset şi $x, y \in X, x \neq y$. Spunem că x este* acoperit *de y dacă nu există nici un element $z \in X$ astfel încât $x < z < y$. Vom nota în acest caz $x \prec y$ şi vom spune că x este* predecesorul *lui y, respectiv că y este* succesorul *lui x.*

De exemplu, pentru posetul numerelor naturale cu relaţia uzuală de ordine, avem $x \prec y \Longleftrightarrow x + 1 = y$.

Relaţia de acoperire astfel definită nu este reflexivă, simetrică, antisimetrică sau tranzitivă, dar are o proprietate mult mai importantă: determină în mod unic relaţia de ordine pe mulţimi finite, după cum urmează:

Propoziţia I.3.3.5. *Fie $(X, \leq)$ un poset finit şi $x, y \in X$ astfel încât $x < y$. Atunci există cel puţin un lanţ (finit) $x = x_0 < x_1 .... < x_n = y$ astfel încât $x_{i-1} \prec x_i, \forall i = \overline{1, n}$.*

Demonstraţie. Prin inducţie după numărul de elemente al mulţimii $\{z \in X \mid x < z < y\}$ (cum X este o mulţime finită, rezultă că şi mulţimea $\{z \in X \mid x < z < y\} \subseteq X$ va fi finită). Dacă $n = 0$, nu există z astfel încât $x < z < y$, deci $x \prec y$ şi luăm $x = x_0 < x_1 = y$. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru orice două elemente x, y pentru care există cel mult n elemente z cu $x < z < y$. Fie acum $x, y \in X$ cu $|\{z \in X \mid x < z < y\}| = n + 1$ şi fixăm $a \in X$ un astfel de element (deci $x < a < y$). Atunci $\{w \in X \mid x < w < a\}$ are cel mult n elemente (este inclusă strict în $\{a \mid x < a < y\}$, pentru că $a < y$); analog şi mulţimea $\{t \in X \mid a < t < y\}$. Rezultă din ipoteza de inducţie că există două lanţuri $x = x_0 < \ldots < x_n = a$ şi $a = y_0 < \ldots < y_n = y$ în care $x_{i-1} \prec x_i, \forall i = \overline{1, n}$ şi $y_{j-1} \prec y_j, \forall j = \overline{1, n}$. Deci $x = x_0 < \ldots < x_n = a = y_0 < \ldots < y_n = y$ verifică cerinţa problemei. Conform inducţiei matematice, rezultă afirmaţia adevărată pentru orice $n \geq 0$. $\square$

Observaţia I.3.3.6. *Din Propoziţia precedentă rezultă că relaţia de acoperire determină în mod unic relaţie de ordine pe un poset finit: $x \leq y$ dacă şi numai dacă $x = y$ sau există un lanţ finit $x = x_0 \prec ... \prec x_n = y$.*

Cu ajutorul relaţiei de acoperire, putem reprezenta un poset finit printr-un graf orientat în care nodurile sunt elementele posetului; între două noduri x şi y există un arc $x \longrightarrow y$ dacă şi numai dacă $x \prec y$. Atunci $x \leq y$ dacă există un drum ce începe în x şi se termină în y. Această reprezentare a posetului se numeşte diagramă Hasse. De exemplu, diagrama Hasse asociată posetului $(\mathcal{P}(0, 1, 2), \subseteq)$ este:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{0,1,2\} & \\
\{0,1\} \arrow[ur] & \{0,2\} \arrow[u] & \{1,2\} \arrow[ul] \\
\{0\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{1\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{I.3.1}
$$

Definiţia I.3.3.7. *Fie $(X, \leq)$ un poset. Un element $x \in X$ se numeşte* *(i)* Minim *(sau cel mai mic element) dacă pentru orice $y \in X$, $x \leq y$.*

(ii) Maxim *(sau cel mai mare element) dacă pentru orice $y \in X$, $x \geq y$.*

(iii) Element minimal *dacă nu există $y \in X$ astfel încât $y \leq x$.*

(iv) Element maximal *dacă nu există $y \in X$ astfel încât $y \geq x$.*

Minimul sau maximul nu există neapărat, dar dacă există, sunt unice: să presupunem că există două minime x_1 şi x_2 într-un poset $(X, \leq)$. Cum x_1 este minim, rezultă $x_1 \leq y, \forall y \in X$. În particular, $x_1 \leq x_2$. Analog avem $x_2 \leq x_1$, deci $x_1 = x_2$. La fel rezultă şi unicitatea maximului. De exemplu, orice interval deschis (a, b), văzut ca poset împreună cu relaţia de ordine uzuală, nu are minim şi nici maxim.

De asemenea, într-un poset $(X, \leq)$ elementele minimale sau maximale pot să existe sau nu: dacă relaţia de oridne este egalitatea E_X, atunci toate elementele sunt minimale şi maximale. În posetul $(\mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset, M\}, \subseteq)$, elemente minimale sunt toate submulţimile cu un singur element, iar elemente maximale sunt complementarele acestora. Rezultă că elementele minimale (maximale) nu sunt neapărat unice. Pe de altă parte, $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu are nici elemente minimale nici maximale. Dacă într-un poset există minim (respectiv maxim), atunci acesta este şi element minimal (respectiv maximal), dar reciproc este fals (de ce?).

Propoziţia I.3.3.8. *Fie $(X, \leq)$ un poset finit nevid. Atunci există cel puţin un element minimal în X (respectiv maximal).*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că nu există nici un element minimal. Fie atunci $x_0 \in X$ (care există pentru că X este nevidă). Cum x_0 nu este minimal, există $x_1 < x_0$. Conform presupunerii făcute, nici x_1 nu este minimal, deci există $x_2 < x_1 < x_0$, etc. Obţinem astfel un lanţ infinit $... < x_2 < x_1 < x_0$ de elemente distincte din X. Dar X este o mulţime finită, contradicţie. Deci presupunerea făcută este falsă şi există elemente minimale. Pentru cele maximale, raţionamentul decurge analog. $\square$

Definiţia I.3.3.9. *Spunem că un poset $(X, \leq)$ este o mulţime total ordonată dacă pentru orice $x, y \in X$, $x \leq y$ sau $y \leq x$.*

Exerciţiul I.3.3.10. *Cum arată diagrama Hasse asociată unei mulţimi total ordonate finite?*

Exemplul I.3.3.11. *(i) (X, E_X) nu este total ordonată, pentru orice X nevidă.*

(ii) $(\mathbb{R}, \leq)$ *este total ordonată.*

(iii) $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ *nu este total ordonată.*

Reamintim că pentru R_1, R_2 relaţii pe mulţimea X, $R_1 \subseteq R_2$ dacă şi numai dacă xR_1y implică xR_2y, $\forall x, y \in X$.

Propoziţia I.3.3.12 (Sortare topologică). *Fie* $(X, \leq)$ *un poset finit nevid. Atunci există* R *o relaţie de ordine totală pe* X *care extinde relaţia iniţială, adică* $\leq \subseteq R$.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in X$ un element minimal (care există conform Propoziţiei precedente. Atunci $(X \setminus \{x_0\}, \leq)$ rămâne un poset finit. Dacă este vid, am terminat. Posetul conţine doar un singur element, comparabil cu el însuşi (orice relaţie de ordine este reflexivă). În caz contrar, există $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$ un element minimal. Continuăm procedeul. Fie $X \setminus \{x_0, x_1\} = \emptyset$, caz în care ne oprim, fie găsim un element minimal x_2 în $X \setminus \{x_0\}$, etc. Cum X este finită, după un număr finit de paşi am epuizat toate elementele mulţimii X şi ne oprim. Am obţinut astfel o enumerare a tuturor elementelor; fie $\prec$ relaţia corespunzătoare, $x_0 \prec x_1$, $x_1 \prec x_2$, etc. şi luăm relaţia de ordine R a cărei relaţie de acoperire este exact $\prec$. Atunci R este relaţie de ordine totală prin construcţie.

Dacă$x \leq y$, atunci y e ales ca element minimal după ce l-am ales deja pe x (altfel y nu ar mai fi minimal). Rezultă deci xRy, deci relaţia R extinde relaţia iniţială de ordine. □

Exemplul I.3.3.13. *Fie posetul* $(\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subseteq)$, *cu diagrama Hasse din (I.3.1). Aplicând algoritmul de mai sus, obţinem ordinea totală astfel:*

(i) Mulţimea vidă este minim, deci şi element mimimal.

(ii) După îndepărtarea mulţimii vide, rămân trei elemente minimale: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$. *Alegem de exemplu pe* $\{0\}$.

(iii) În mulţimea rămasă, alegem dintre elementele minimale $\{1\}$*şi* $\{2\}$ *pe* $\{1\}$, *de exemplu, urmând ca la pasul următor să luăm pe* $\{2\}$.

(iv) Am rămas doar cu mulţimile cu două sau trei elemente. Elemente minimale sunt acum $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$. *Reluăm operaţia de extragere a elementelor minimale ca mai sus.*

(v) Ultimul element rămas este $\{0, 1, 2\}$.

Am obţinut astfel ordinea totală $\emptyset \prec \{0\} \prec \{1\} \prec \{2\} \prec \{0, 1\} \prec \{0, 2\} \prec \{1, 2\} \prec \{0, 1, 2\}$, *care conţine şi relaţia de incluziune iniţială.*

I.3.4 Relaţii de echivalenţă şi partiţii

Definiţia I.3.4.1. *Fie X mulţime nevidă. O relaţie R pe mulţimea X se numeşte* relaţie de echivalenţă *dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

Exemplul I.3.4.2. *(i) Relaţia de egalitate pe orice mulţime X este o relaţie de echivalenţă (de fapt, este cea mai mică relaţie de echivalenţă: oricare altă relaţie de echivalenţă R este în particular reflexivă, deci $E_X \leq R$).*

(ii) Fie X mulţimea punctelor din plan şi O un punct fixat. Spunem că două puncte P şi P' sunt în relaţia R_1, respectiv R_2, dacă dreptele OP şi OP' coincid, respectiv dacă segmentele OP şi OP' au lungimi egale. Atunci R_1 şi R_2 sunt relaţii de echivalenţă.

Definiţia I.3.4.3. *O* partiţie *a mulţimii X este o familie de submulţimi $(X_i)_{i\in I}$ (unde I este o mulţime de indici) astfel încât:*

(i) $X_i \cap X_j = \emptyset \iff i \neq j$;

(ii) $\cup_{i\in I} X_i = X$

Fiecărei partiţii $(X_i)_{i\in I}$ a mulţimii X îi putem asocia o relaţie R, prin $xRy \iff \exists i \in I, x, y \in X_i$. Atunci R este clar reflexivă şi simetrică. Studiem tranzitivitatea: fie $x, y, z \in X$ astfel încât xRy şi yRz. Rezultă că există $i \in I$ pentru care $x, y \in X_i$ şi $j \in I$ cu $y, z \in X_j$. Dar dacă $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, de unde obligatoriu $i = j$ şi $x, y, z \in X_i$. Deci relaţia astfel construită este o relaţie de echivalenţă.

Invers, să plecăm cu R relaţie de echivalenţă pe X. Pentru $x \in X$, notăm $[x]_R = \{y \in X | xRy\} \subseteq X$. $[x]_R$ se numeşte *clasa de echivalenţă* a elementului x.

Propoziţia I.3.4.4. *Cu notaţiile de mai sus, au loc următoarele:*

(i) $\cup_{x\in X} [x]_R = X$

(ii) $xRy \iff [x]_R = [y]_R \iff [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$.

În particular, rezultă că familia $([x]_R)_{x\in X}$ formează o partiţie a mulţimii X.

Demonstraţie. Avem $\cup_{x\in X} [x]_R = X$ pentru că $x \in [x]_R, \forall x \in X$.
Fie acum $x, y \in X$ cu xRy şi $z \in [x]_R$. Atunci zRx; dar xRy, de unde zRy, adică $z \in [y]_R$. Rezultă $[x]_R \subseteq [y]_R$; analog $[y]_R \subseteq [x]_R$, de unde $[x]_R = [y]_R$. Invers, dacă $[x]_R = [y]_R$, atunci din $x \in [x]_R = [y]_R$ rezultă yRx şi prin simetrie xRy. Să arătăm acum echivalenţa $xRy \iff [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Dacă xRy, atunci $x \in [y]_R$; dar $x \in [x]_R$, de unde $x \in [x]_R \cap [y]_R$. Reciproc, fie $z \in [x]_R \cap [y]_R$. Rezultă xRz şi yRz, de unde prin tranzitivitate xRy. □

Consecinţa I.3.4.5. *Mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe o mulţime X este în bijecţie cu mulţimea partiţiilor mulţimii X.*

Demonstraţie. Am văzut că fiecărei partiţii îi corespunde o relaţie de echivalenţă şi invers, fiecărei relaţii de echivalenţă îi corespunde o partiţie. Vom arăta acum că aceste corespondenţe sunt inverse una celeilalte.

Fie $(X_i)_{i\in I}$ o partiţie şi R relaţia de echivalenţă asociată. Aceasta determină partiţia $([x]_R)_{x\in X}$. Vrem să arătăm că cele două partiţii coincid. Fie deci X_i o mulţime din partiţie şi $x \in X_i$ fixat. Atunci $[x]_R \subseteq X_i$ din construcţia relaţiei de echivalenţă şi reciproc, dacă $y \in X_i$, cum $x \in X_i$, rezultă yRx, deci $y \in [x]_R$. Am obţinut astfel $X_i = [x]_R$.

Invers, fie acum R o relaţie de echivalenţă şi partiţia $([x]_R)_{x\in X}$ asociată. Notăm cu $\tilde{R}$ relaţia de echivalenţă determinată de acestă partiţie: $x\tilde{R}y \iff \exists z \in X, x, y \in [z]_R$. Dar din tranzitivitate rezultă xRy. Invers, dacă xRy, atunci $x, y \in [x]_R$, deci $x\tilde{R}y$ şi cele două relaţii de echivalenţă coincid. $\square$

Vom nota $X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$ mulţimea claselor de echivalenţă; X/R se numeşte *mulţimea factor* asociată relaţiei R. Mulţimea factor X/R este o submulţime a mulţimii părţilor $\mathcal{P}(X)$. Funcţia $\pi_R : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, $\pi_R(x) = [x]_R$ are imaginea $\mathsf{Im}f = X/R$; funcţia surjectivă asociată $X \longrightarrow X/R$, $x \mapsto [x]_R$ se numeşte *surjecţia canonică* şi o vom nota tot cu π_R.

Exerciţiul I.3.4.6. *Când $\pi_R : X \longrightarrow X/R$ e bijectivă?*

Exerciţiul I.3.4.7. *Determinaţi mulţimile factor pentru fiecare dintre relaţiile de echivalenţă din Exemplul I.3.4.2.*

Exemplul I.3.4.8. *Fie $f : X \longrightarrow Y$ o funcţie. Definim relaţia nucleu asociată funcţiei f prin $xR_fx' \iff f(x) = f(x')$. Rezultă imediat că R_f este o relaţie de echivalenţă (dacă f este injectivă, atunci $R_f = E_X$). Obţinem următoarea diagramă:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_R"'] & Y \\ X/R \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] & \mathsf{Im}f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

în care i este funcţia de incluziune.

Construim o funcţie $\tilde{f} : X/R \longrightarrow \mathsf{Im}f$ prin $\tilde{f}([x]_R) = f(x)$; atunci $\tilde{f}$ e bine definită şi injectivă, căci din $[x]_R = [x']_R$ rezultă xR_fx', adică $f(x) = f(x')$. Mai mult, $\tilde{f}$ este şi surjectivă: fie $y \in Imf$. Atunci $y = f(x), x \in X$ şi luăm $y = f(x) = \tilde{f}([x]_R)$.

Se verifică imediat că $f = i \circ \tilde{f} \circ \pi_R$. Am scris astfel funcţia f ca o compunere dintre o funcţie injectivă, una bijectivă şi una surjectivă.