Tema 12

Exerciţiul 1. *Determinaţi soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale:*

1. $tx' = 2x + t^3 \mathsf{cos} t,\ t > 0.$
2. $t^2x' - 2tx + 3 = 0,\ t > 0.$
3. $x' = 1 + 3x \cdot \mathsf{tg} t,\ t \in (0, \pi).$
4. $tx' + 2(1-t)x = e^t,\ t > 0.$

Exerciţiul 2. *Determinaţi soluţia ecuaţiei diferenţiale* $x' = 2t(1 + x^2)$.

Exerciţiul 3. *Fie ecuaţia diferenţială* $x' = f(t)x + g(t)x^\alpha$, *unde* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *(ecuaţie* Bernoulli*).*

1. *Arătaţi că dacă împărţim ecuaţia prin* x^α *şi notăm* $y = x^{1-\alpha}$, *atunci ecuaţia dată este echivalentă cu o ecuaţie diferenţială liniară.*
2. *Utilizând acest rezultat, determinaţi soluţia generală a ecuaţiilor*

   (a) $x' = \frac{2x}{t} - \frac{x^2}{2t^2},\ t > 0.$

   (b) $tx^2x' = x^3 + 2t,\ t > 0.$

Exerciţiul 4. *Aflaţi curbele plane* $y = f(x)$ *de clasă* C^1 *pentru care distanţa de la punctul* $O(0, 0)$ *la dreapta normală la curbă în punctul* $(x, f(x))$ *este egală cu* $|x|$. *(*Indicaţie*: normala la curbă este dreapta perpendiculară pe dreapta tangentă în punctul de tangenţă)*

Exerciţiul 5. *Determinaţi soluţia generală a următoarelor sisteme de ecuaţii diferenţiale:*

1. $\begin{cases} x_1' &= -7x_1 + x_2 \\ x_2' &= -2x_1 - 5x_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' &= 4x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' &= 5x_1 - 3x_2 + 2e^{3t} \\ x_2' &= x_1 + x_2 + 5e^{-t} \end{cases}$

Exercițiul 6. *Aflați, pentru fiecare dintre sistemele de mai jos, soluția care verifică condițiile date:*

1. $\begin{cases} x_1' &= 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' &= 4x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = -2$

2. $\begin{cases} x_1' &= -x_1 + x_2 \\ x_2' &= -x_1 + x_3 \\ x_3' &= -x_1 \end{cases}$, $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1, x_3(0) = 0$

3. $\begin{cases} x_1' &= 4x_2 + 5e^t \\ x_2' &= -x_1 - 20e^{-t} \end{cases}$, $x_1(0) = -5, x_2(0) = 1$

Exercițiul 7. *Rezolvați următoarele sisteme de ecuații diferențiale, căutând soluția sub forma unor serii de puteri* $x_1(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$, $x_2(t) = \sum_{n\geq 0} b_n t^n$:

1. $\begin{cases} x_1' &= 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' &= 9x_1 - 6x_2 \end{cases}$, $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$

2. $\begin{cases} x_1' &= 6x_1 - 4x_2 + e^t \\ x_2' &= 9x_1 - 6x_2 \end{cases}$, $x_1(0) = 7, x_2(0) = 9$

Exercițiul 8. *Fie ecuația diferențială* $x'' - 3x' + 2x = 2t - 1$.

1. *Arătați că dacă notăm* $x_1 = x$, $x_2 = x'$, *atunci ecuația dată este echivalentă cu un sistem de ecuații diferențiale liniare în necunoscutele* x_1, x_2.

2. *Rezolvați acest sistem și determinați astfel soluția generală a ecuației inițiale.*