Tema 11

Exerciţiul 1. *Arătaţi că formula* $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *defineşte un produs scalar pe* $\mathbb{R}^2$.

Exerciţiul 2. *Fie* V *mulţimea şirurilor de numere reale* $(x_n)_{n\geq 0}$ *pentru care seria* $\sum\limits_{n\geq 0} x_n^2$ *este convergentă.*

1. *Verificaţi că* V *este un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale în raport cu operaţiile*

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\geq 0} + (y_n)_{n\geq 0} &= (x_n + y_n)_{n\geq 0} \\ \alpha(x_n)_{n\geq 0} &= (\alpha x_n)_{n\geq 0} \end{aligned}$$

   unde $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0} \in V$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. *Arătaţi că pentru orice şiruri* $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0} \in V$, *seria* $\sum\limits_{n\geq 0} x_n y_n$ *este convergentă.*

3. *Arătaţi că*

$$< (x_n)_{n\geq 0}, (y_n) >= \sum_{n\geq 0} x_n y_n \qquad \forall (x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0} \in V$$

   este un produs scalar pe V.

Exerciţiul 3. *În spaţiul vectorial* $\mathbb{R}_3[X]$ *se consideră produsul scalar*

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX, \ \forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$$

Folosind algoritmul de ortogonalizare Gram-Schmidt, să se determine o bază ortonormată în raport cu acest produs scalar, pornind de la baza canonică $1, X, X^2, X^3$.

Exerciţiul 4. *Pe* $\mathbb{R}^4$ *considerăm produsul scalar*

$$< (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + t_1t_2$$

unde $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$. *Fie* $V \subseteq \mathbb{R}^4$ *subspaţiul vectorial al soluţiilor sistemului*

$$\begin{cases} 3x + 2y + z - 2t &= 0 \\ 5x + 4y + 3z + 2t &= 0 \\ x + 2y + 3z + 10t &= 0 \end{cases}$$

1. *Determinaţi o bază şi dimensiunea lui V.*
2. *Determinaţi mulţimea $V^{\perp}$ a vectorilor din $\mathbb{R}^4$ ortogonali pe toţi vectorii din V.*
3. *Arătaţi că $V^{\perp}$ formează un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^4$. Ce dimensiune are?*
4. *Determinaţi suma şi intersecţia subspaţiilor V şi $V^{\perp}$.*

Exerciţiul 5. *Fie V un spaţiu vectorial real pentru care există un produs scalar $< \, , \, >$. Definim norma unui vector $x \in V$ prin $||x|| = \sqrt{<x,x>}$. Atunci doi vectori $x, y \in V$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (Pitagora).*

Exerciţiul 6. *Fie matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

1. *Arătaţi că A este diagonalizabilă.*
2. *Determinaţi o bază ortonormată $\{v_1, v_2, v_3\}$ în $\mathbb{R}^3$ formată cu vectori proprii ai matricei A.*
3. *Fie $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matricea pătratică ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor obţinuţi la punctul anterior. Atunci $T^{-1} = T^t$.*

Exerciţiul 7. *Fie Γ curba plană de ecuaţie $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.*

1. *Arătaţi că ecuaţia poate fi scrisă sub forma $(x \;\; y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică.*
2. *Arătaţi că matricea A determinată la punctul anterior se diagonalizează.*
3. *Determinaţi o bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$ formată cu vectori proprii ai matricei A; fie T matricea ale cărei coloane sunt coordonatele acestor vectori.*
4. *Determinaţi ecuaţia curbei Γ în urma schimbării coordonatelor după formula $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Ce observaţi?*

Exerciţiul 8. *Determinaţi descompunerea QR a matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi pseudosoluţia sistemului $\begin{cases} 2x+2y & = 1 \\ x-y & = -1 \\ 2x & = -2 \end{cases}$. Aceeaşi cerinţă pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, respectiv sistemul $\begin{cases} x+3y+4z & = 1 \\ 2x+2y+z & = -1 \\ x-y & = 1 \\ y+z & = 3 \end{cases}$.*