Tema 7

Exercițiul 1. *Pe mulțimea* $V = \mathbb{R}^2$ *considerăm operațiile*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

și

$$\alpha \cdot (x, y) = \begin{cases} (0,0) & \textit{dacă } \alpha = 0 \\ (\alpha x, \frac{y}{\alpha}) & \textit{dacă } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

pentru (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Este* V *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{R}$ *în raport cu aceste operații? Justificați răspunsul.*

Exercițiul 2. *Să se arate că grupul* $(\mathbb{Z}, +)$ *nu poate fi înzestrat cu structură de spațiu vectorial peste* $\mathbb{Q}$ *sau peste* $\mathbb{R}$.

Exercițiul 3. *Fie* $\Bbbk$ *un corp comutativ și* $V = \{(x, y) \in \Bbbk^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. *Pe* V *considerăm operațiile uzuale de adunare și multiplicare cu scalari pe componente, adică*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \textit{ și } \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

pentru (x, y), $(x', y') \in \Bbbk^2$, $\alpha \in \Bbbk$. *Este* V *un spațiu vectorial peste* $\Bbbk$, *dacă:*

(i) $\Bbbk = \mathbb{R}$ *(ii)* $\Bbbk = \mathbb{C}$ *(iii)* $\Bbbk = \mathbb{Z}_2$ *(iv)* $\Bbbk = \mathbb{Z}_5$

Exercițiul 4. *Care dintre următoarele submulțimi este subspațiu vectorial în* $\mathbb{R}[X]$*?*

(i) $\{a + bX + cX^2 + dX^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b + c + d = 0\}$

(ii) $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid grad(P) > 2\}$

(iii) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + X + 1 \mid P\right\}$

(iv) $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = P(-X)\}$

Exercițiul 5. *Vectorul* $(3, -1, 0, 1)$ *apartine spațiului generat de vectorii* $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ *și* $(1, 1, 9, -5)$? *în* $\mathbb{R}^4$*?*

Exerciţiul 6. *Fie* V *spaţiul vectorial al elementelor de forma* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, *care satisfac sistemul*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Determinaţi o familie finită de vectori care generează pe V.

Exerciţiul 7. *Fie* V *un spaţiu vectorial,* $X \subseteq V$ *o submulţime şi* $x, y \in V$. *Să se arate că dacă* $y \in Sp\,(X \cup \{x\})$ *şi* $y \notin Sp(X)$, *atunci* $x \in Sp(X \cup \{y\})$.

Exerciţiul 8. *Fie* $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f\,\textit{continuă}\}$. *Pe* V *introducem operaţiile:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

şi

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f, g \in V, \alpha \in \mathbb{R}$. *Atunci:*

(i) V *este un spaţiu vectorial peste* $\mathbb{R}$;

(ii) Funcţiile $f_1, \ldots, f_n \in V$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$, $\ldots$, $f_n(x) = e^{nx}$ *sunt liniar independente în* V, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(iii) $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}} V = \infty$.

Exerciţiul 9. *Determinaţi o bază şi dimensiunea următoarelor spaţii vectoriale:*

(i) $U_1 = Sp\{(2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7), (0, -1, 6, 13)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(ii) $U_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y - z - t = 0 \\ x - 3z - 2t = 0 \end{cases} \}$

Exerciţiul 10. *Arătaţi că polinoamele* $1, X - 1, \frac{(X-1)^2}{2!}, \ldots, \frac{(X-1)^n}{n!}$ *formează o bază a spaţiului vectorial al polinoamelor de grad cel mult* n *peste* $\mathbb{R}$. *(Indicaţie: utilizaţi eventual seriile Taylor).*