Tema 9-10

Exercițiul 1. *Fie W_1, W_2 subspații vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$, astfel că $\dim W_1 < \dim W_2$. Arătați că dacă $W_1 \cap W_2 \neq 0$, atunci $W_1 \subseteq W_2$.*

Exercițiul 2. *Determinați o bază și dimensiunea pentru fiecare dintre spațiile vectoriale $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$, unde*

1. $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(0) + 2P'(0) + P(0) = 0,\ P(1) = P(-1)\}$,
   $V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P''(0) - 2P'(0) + P(0) = 0,\ P(1) = -P(-1)\}$
2. $V_1 = Sp\{(2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7), (0, -1, 6, 13)\}$

$$V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ x - y - z - t & = 0 \\ x - 3z - 2t & = 0 \end{cases} \}$$

Exercițiul 3. *Care dintre următoarele funcții $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ sunt morfisme de spații vectoriale? (argumentați răspunsul)*

1. $f(P(X)) = P^2(X)$
2. $f(P(X)) = P(X^2)$

Exercițiul 4. *Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ morfismul a cărei matrice în bazele canonice este $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $f((1, 2, 3))$.*

Exercițiul 5. *Fie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 3y - z, y - z, x + 2z)$.*

1. *Scrieți matricea asociată lui f în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.*
2. *Determinați $\ker(f)$ și $\mathsf{Im}(f)$ (o bază și dimensiunea pentru fiecare).*
3. *Scrieți matricea asociată lui f în baza $\mathcal{B}' = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$.*

Exercițiul 6. *Fie V un spațiu vectorial de dimensiune $n < \infty$ peste un corp comutativ $\mathbb{k}$ și $f : V \longrightarrow V$ un endomorfism neinjectiv. Atunci există o bază în V astfel matricea asociată lui f în această bază să conțină pe prima coloană numai zero.*

Exercițiul 7. *Să se determine un morfism de spații vectoriale* $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$*, astfel încât* $\ker(f) = Im(f) = Sp\{1 + X^2, X^2 + X^3\}$ *și să se scrie matricea lui* f *într-o bază care conține polinoamele* $1 + X^2$ *și* $X^2 + X^3$.

Exercițiul 8. *Fie* $\Bbbk$ *un corp comutativ infinit și* V *un spațiu vectorial peste* $\Bbbk$. *Să se arate că pentru orice endomorfism* $f : V \longrightarrow V$*, există* $g, h : V \longrightarrow V$ *endomorfisme inversabile astfel încât* $f = g - h$.

Exercițiul 9. *Fie* $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, morfismul de spații vectoriale dat prin* $f(A) = A^t$, $(\forall)\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Arătați că valorile proprii ale lui* f *sunt* -1 *și* 1.
2. *Determinați subspațiile proprii* V_{-1} *și* V_1.
3. *Determinați intersecția și suma subspațiilor proprii*
4. *Calculați determinantul matricii asociate lui* f *în baza canonică din* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercițiul 10. *Aflați valorile și vectorii proprii pentru matricea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *și rezolvați ecuația matricială* $X^2 = A$.

Exercițiul 11. *Dacă* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$*, calculați* A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.