UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Proiectarea Logică

05. Sinteza circuitelor combinaţionale

SINTEZA CIRCUITELOR COMBINAŢIONALE

Minimizarea logică exactă

Minimizarea logică exactă vizează rezolvarea găsirii unei acoperiri minimale.
Este considerată o problema clasică în teoria funcţiilor binare de variabile discrete şi primul rezultat remarcabil în găsirea unei acoperiri minime a fost formulat de Quine şi McCluskey. Soluţia problemei, aşa cum a fost formulată de autori, se bazează pe teorema lui Quine, teoremă care delimitează spaţiul căutărilor soluţiei optime.

Teorema Quine

Există o acoperire minimă care este primă.

Demonstraţie Se consideră o acoperire minimă care nu este alcătuită din implicanţi primi. Fiecare implicant care nu este prim poate fi înlocuit printr-un implicant prim care-l conţine. Astfel, mulţimea rezultată de implicanţi este o acoperire şi are aceeaşi cardinalitate ca şi acoperirea iniţială. În consecinţă, există o acoperire minimă care este alcătuită doar din implicanţi primi.

Teorema Quine permite limitarea căutării unei acoperiri minimale la acele acoperiri care constau exclusiv din implicanţi primi. Se remarcă faptul ca teorema se poate generaliza pentru a manevra definiţii mai largi ale acoperirii minime, unde costul unui implicant este întotdeauna mai mic sau egal cu costul unui implicant pe care-l conţine. Teorema se aplică, spre exemplu, cazului de minimizare al numărului literalilor pentru funcţiile scalare (cu o singură ieşire).

E. McCluskey a formulat căutarea unei acoperiri minime ca o problema de acoperire într-un *tabel de implicanţi primi*. Se va aborda aceasta formulare considerând funcţii scalare complet definite.

Un tabel de implicanţi primi este, în fapt, o matrice binară $\boldsymbol{A}$ ale cărei coloane sunt în corespondenţă biunivocă cu implicanţii primi ai funcţiei f, iar rândurile sunt în corespondenţă biunivocă cu mintermii funcţiei. Un element $a_{i,j} \in \boldsymbol{A}$ este 1 dacă şi numai dacă cel de-al j-lea prim acoperă (conține) cel de-al i-lea minterm.

O acoperire minimă este o mulţime minimă de coloane care acoperă toate liniile, sau echivalent: o mulţime minimă de primi ce acoperă (conţin) toţi mintermii funcţiei.

Se poate observa că:
Problema acoperirii poate fi văzută ca fiind problema găsirii unui vector binar $\boldsymbol{x}$ reprezentând o mulţime de implicanţi primi cu cardinalitate ($|\boldsymbol{x}|$) minimă astfel încât :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} >= 1 \qquad (1)$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ poate fi privită ca matricea de incidenţă a unui hipergraf ale cărui noduri corespund mintermilor, iar arcele corespund implicanţilor primi. Într-o astfel de modelare, problema acoperirii corespunde unei acoperiri cu arce ale hipergrafului.

Exemplul 2.6. Fie funcţia scalară de trei variabile *a, b* şi *c:*

$$f(a, b, c) = a'b'c' + a'b'c + ab'c + abc + abc'$$

Se poate verifica cu uşurinţă faptul că implicanţii primi ai acestei funcţii sunt aceştia:

(p)	0	0	*	|1
(q)	*	0	1	|1
(r)	1	*	1	|1
(s)	1	1	*	|1

Ţinând seama de implicanţii primi *p, q, r* şi s, matricea ***A*** arată astfel:

	p	*q*	*r*	*s*
000	1	0	0	0
001	1	1	0	0
101	0	1	1	0
111	0	0	1	1
110	0	0	0	1

Vectorul ***x*** = $[1101]^T$ reprezintă o acoperire, pentru că ***Ax*** >= 1.
Se poate afirma că vectorul ***x*** selectează implicanţii primi *p*,*q* şi *s*.

Minimizarea exactă poate fi rezolvată calculând întâi tabelul de implicanţi primi şi apoi soluţionând problema de acoperire rezultată.

De remarcat faptul că problema de acoperire în acest caz este unată, deoarece toate clauzele de acoperire pot fi exprimate ca o disjuncţie de implicanţi. Dificultatea abordării constă din intractabilitatea problemei de acoperire şi din mărimea tabelului de implicanţi.

O funcţie scalară binară cu *n* variabile binare poate avea $3^n/n$ primi şi 2^{n-1} mintermi. De aceea, un algoritm exponenţial al unei probleme de mărime exponenţială este probabil să necesite un timp lung de calcul şi un volum mare de memorie.

Rezultatele actuale arată că multe probleme practice de minimizarea logică ale unor funcţii dificile pot fi rezolvate exact prin algoritmi performanţi care exploatează natura problemei şi structuri de date eficiente.

Tabelul de implicanţi poate fi redus. Se pot extrage coloanele esenţiale corespunzătoare implicanţilor primi esenţiali, deoarece aceştia oricum trebuie să aparţină oricărei soluţii. Se pot înlătura liniile dominante şi coloanele dominate.

Extracţia implicanţilor primi esenţiali şi înlăturarea coloanelor dominate şi a liniilor dominante se poate face iterativ. Se obţine astfel, în final, tabelul redus al implicanţilor primi.

Dacă tabelul redus se întâmplă sa fie vid, atunci s-a găsit soluția deja, prin implicanţii primi esenţiali anterior extraşi.

Altfel, tabelul redus, numit uneori şi tabel ciclic, modelează așa-zisul *miez ciclic al problemei.*

Metoda originală propusă de E. McCluskey revine la branşări, adică se aleg diferite combinaţii de coloane (implicanţi primi) şi se evaluează costul corespunzător.

Chiar dacă alegerea unei coloane (un prim implicant) poate conduce la simplificări bazate pe regulile de dominanţă şi de esenţiali, procesul este exponenţial (în cel mai defavorabil caz) în raport cu mărimea tabelei reduse.

Exemplul 2.7. Se consideră matricea ***A*** din exemplul 2.6.

	p	*q*	*r*	*s*
000	1	0	0	0
001	1	1	0	0
101	0	1	1	0
111	0	0	1	1
110	0	0	0	1

Se remarcă imediat că implicanţii *p* şi *s* sunt esenţiali. Aceasta revine la a spune că implicanţii primi *p* şi *s* aparţin oricărei acoperiri.

Din acest motiv, coloanele corespunzătoare pot fi şterse la fel ca şi liniile incidente lor. După procesul de reducere al matricei, matricea astfel obţinută are o singură linie şi două coloane, arătând astfel :

	q	*r*
101	1	1

În acest caz matricea ilustrează faptul că oricare dintre cei doi implicanţi *q* şi *r* poate fi folosit pentru a completa o acoperire minimă.

Matricea redusă nu este ciclică şi nu este necesar, în consecinţă, un proces de branşare.

În concluzie, există două soluţii ale problemei acoperirii prime pentru această funcţie:

{*p*, *q*, *s*} şi {*p*, *r*, *s*}.

O altă abordare clasică, numită, adesea metoda lui Petrick, constă în scrierea clauzelor de acoperire ale tabelului (redus) de implicanţi în forma unui produs de sume.

Fiecare clauză (sau, echivalent, fiecare sumă din acest produs) corespunde unui minterm şi aceasta reprezintă disjuncţia implicanţilor primi care acoperă respectivul minterm.

Produsul de sume este apoi transformat într-o suma de produse ce este satisfăcută ori de câte ori un termen al său ia valoarea 1.
În acest caz, termenii produs reprezintă implicanţii primi care au fost aleşi.

Costul unei acoperiri este legat de numărul de literali din produs. Ca rezultat, o acoperire minimă este identificată prin orice termen produs al SDP având cei mai puţini literali.

Exemplul 2.8. Se aplică metoda lui Petrick matricei ***A*** (tabelului cu incidenţa implicanţilor primi, cum mai este numit) din exemplul 2.6.

	p	*q*	*r*	*s*
000	1	0	0	0
001	1	1	0	0
101	0	1	1	0
111	0	0	1	1
110	0	0	0	1

Clauza care stabileşte acoperirea primului minterm este p; clauza relativă la cel de-al doilea minterm este $p + q$, etc. Produsul de sume arată astfel:

$$(p)(p + q)(q + r)(r + s)(s) = 1$$

Calculând produsele se obţine forma sumă de produse (SDP):

$$pqs + prs = 1$$

ceea ce exprimă faptul că exista două acoperiri minime având aceeaşi cardinalitate, 3.

Prima acoperire este alcătuită din această submulţime $\{p, q, s\}$ a implicanţilor primi, iar a doua reprezintă submulţimea $\{p, r, s\}$ a implicanţilor primi.

De remarcat că metoda lui Petrick s-ar fi putut aplica, încă mai eficient, tabelului redus de implicanţi primi şi ar fi condus la o singura clauză:

$$\beta+\gamma =1$$

Astfel, ori implicantul prim q ori implicantul prim r, împreună cu implicanţii primi esenţiali $\{p, s\}$ determină o acoperire minimă cu implicanţi primi ai funcţiei considerate.

Chiar dacă exprimarea produsului de sume şi alegerea termenului produs din suma de produse sunt imediate, transformarea produsului de sume într-o sumă de produse (SDP) implică un număr exponenţial de operaţii.
Acest fapt limitează metoda Petrick la tabele cu dimensiuni relativ mici.

Algoritmul Quine-McCluskey poate fi extins la funcţii vectoriale prin calculul implicanţilor primi multi-ieşire şi a tabelului (matricii) implicanţilor primi, în mod corespunzător.

Extensii pentru ca să opereze cu funcţii incomplet specificate sunt, de asemenea, relativ simplu de alcătuit şi de aplicat.