

Algebrele Booleene

Note de curs

Dr.Ing.Mat. ION I. BUCUR

În anul 1854 apare la New York, în editura Dover Publication, lucrarea *An Investigation of the Laws of Thought* a matematicianului și logicianului englez George Boole. Această lucrare conține introducerea unei algebre (o structură algebrică) intenționată să descrie relațiile logice complexe ale limbajului natural.

Focalizarea acestei lucrări asupra limbajului natural și relațiilor logice complexe ale acestuia este deosebit de importantă dacă se privește această abordare prin prisma translatarei unei descrieri, în limbaj natural, a funcționării unui circuit (bloc funcțional) oarecare, într-o descriere riguroasă, ne-ambiguă și echivalentă funcțional acesteia.

În linii mari activitatea de proiectare actuală în domeniul circuitelor digitale este compusă, între altele, dintr-o translatare de acest fel. Termenii au evoluat în complexitate dar ideea este, în principiu, aceeași.

Exemplul 1. Se consideră următoarea descriere verbală a unui bloc simplu de comandă al ușii unei săli:

- ușa este deschisă atâta timp cât există în imediata sa proximitate (aproximativ 50 cm de-o parte și de alta a ușii) o persoană și rămâne deschisă pentru un interval, relativ scurt, de timp t chiar și după plecarea oricărei persoane din zona de proximitate.

Se dorește o scriere concisă exactă, în termenii algebrei comutatorilor, a acestei descrieri (făcută în termenii limbajului natural) a funcționării ușii.

Fiecare element relevant din descrierea în limbaj natural va fi notat printr-o variabilă care poate lua doar două valori 0 și 1.

Ușa este deschisă. Se notează prin variabila U . Câtă vreme ușa este deschisă, $U = 1$, iar când ușa este închisă $U = 0$. Închiderea și deschiderea ușii are loc în urma unei acționări, printr-un motor electric – de exemplu.

Există o persoană în zona de proximitate. Determinarea unei persoane în zona de proximitate se poate realiza printr-un senzor cu traductor inductiv, fotoelectric etc. Prezența unei persoane în zona de proximitate se notează prin variabila P . Ori de câte ori este o persoana în apropierea ușii $P = 1$, altfel $P = 0$.

Temporizatorul este activ pentru durata prestabilită t . Se notează prin T . Atunci când temporizatorul este activ $T = 1$, altfel $T = 0$. Temporizatorul este activat de îndată ce este sesizată o persoană în zona de proximitate. Activarea temporizatorului se mai numește și startarea acestuia.

Prezența unei persoane în zona de proximitate face ca ușa să se deschidă, pe de-o parte și activează temporizatorul, pe de-altă parte. Apariția unei persoane, în zona de proximitate, pe durata temporizării are ca efect numai reactivarea temporizării, ușa fiind deja deschisă.

Se poate deduce ușor că translatarea descrierii inițiale poate fi făcută succint astfel:

$$U = SAU(P,T).$$

Sintetic funcționarea ușii poate fi exprimată, utilizând expresia anterioară cu blocul funcțional SAU, astfel: ușa este deschisă dacă este sesizată, în apropiere, o persoană sau este activ temporizatorul.

Limbajul natural are, spre deosebire de cel matematic, un anumit grad de ambiguitate. Enumerări de forma „*Marcajul poate fi alb și roșu sau galben*”, nu au o întotdeauna precedentă bine stabilită a operatorilor fundamentali. Operatorii fundamentali au particularități care pot depinde de context, în limbajul natural. Astfel, se consideră fraza „*Colegul meu este îmbrăcat cu o jachetă roșie sau cu un sacou verde*”, spre exemplu. Această frază are două dependențe în raport cu care este adevărată. Este adevărată atunci când colegul poartă o jachetă roșie sau când poartă un sacou verde dar, ambele situații nu pot fi simultan satisfăcute, evident. Deosebirile dintre limbajul

natural și cel matematic fac din procesul de translatore al acestora, în proiectarea sistemelor și circuitelor digitale, o activitate solicitantă.

□

Modul cel mai uzitat de introducere al algebrei Booleene face apel la setul de postulate introdus de Huntington în anul 1904. Primul postulat poate fi considerat ca stabilind sistemul aflat în studiu.

I. *Există o mulțime K de obiecte sau elemente, satisfăcând o relație de echivalență notată prin „=”, îndeplinind principiul substituției.*

Prin substituție se înțelege că relația $a = b$ între elementele a și b implică faptul că elementul a poate fi substituit prin elementul b în orice expresie care conține elementul a fără să fie afectată validitatea expresiei respective.

IIa. *Este definită o lege de compoziție „+” astfel încât expresia $a + b$ este în K , $\forall a, b \in K$.*

IIb. *Este definită o lege de compoziție „*” astfel încât expresia $a * b$ (abreviat ab) este în K , $\forall a, b \in K$.*

IIIa. *Există un element $0 \in K$, astfel încât $a + 0 = a$, $\forall a \in K$.*

IIIb. *Există un element $1 \in K$, astfel încât $a * 1 = a$, $\forall a \in K$.*

IVa. *$a + b = b + a$, comutativitatea legii +.*

IVb. *$a * b = b * a$, comutativitatea legii *.*

Va. *$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$, distributivitatea + față de *.*

Vb. *$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$, distributivitatea * față de +.*

VI. *$\forall a \in K, \exists a' \in K$, astfel încât*

$$a * a' = 0, \text{ și}$$

$$a + a' = 1.$$

$$\exists x, y \in K, \text{ astfel încât } x \neq y.$$

Se poate remarca faptul că nu s-a precizat nimic în legătură cu numărul sau tipul elementelor care alcătuiesc mulțimea K . Există mai multe mulțimi care satisfac aceste postulate. Câteva dintre acestea vor fi exemplificate în continuare.

Pentru ca un set de postulate să fie valid acesta trebuie să fie consistent. Consistența revine la demonstrarea faptului că nici unul dintre postulate nu contrazice oricare dintre celelalte postulate din setul considerat. Verificarea consistenței se poate face prin examinarea fiecărui postulat, pentru a demonstra că nici un postulat nu contravine oricărui grup posibil de postulate, dar abordarea este extrem de laborioasă. Există, însă, o altă cale mult mai simplă, pentru verificarea consistenței. Pentru aceasta este necesar să se găsească doar un singur exemplu de algebră booleană despre care se știe, în mod independent, că este consistentă. Dacă o astfel de structură algebrică satisface toate postulatele lui Huntington, atunci postulatele (în sine) sunt consistente.

Cea mai simplă algebră booleană constă din numai două elemente, notate prin 1 și 0, definite că satisfac:

$$1' = 0, \quad 0' = 1$$

$$1 * 1 = 1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1,$$

și

$$0 + 0 = 0 * 0 = 1 * 0 = 0 * 1 = 0.$$

Se remarcă faptul că postulatele I, II, III și VII sunt satisfăcute prin definiție. Satisfacerea legilor de comutativitate (IVa și IVb) este evidentă iar verificarea legilor de distributivitate (Va și Vb) necesită doar alcătuirea listelor de valori de-o parte și de alta a ecuațiilor, pentru toate combinațiile de valori ale variabilelor a , b și c . Postulatul VI este imediat verificabil atribuind valori (0 și 1) variabilei a .

O altă cerință importantă este independența postulatelor. Aceasta revine la verificarea faptului că nici unul dintre postulate nu poate fi dedus din celelalte. Postulatele, așa cum au fost exprimate sunt independente. Această verificare este mult mai complexă, și nu este esențială pentru scopul acestei abordări. Pe de altă parte, nu este necesară abordarea algebrilor Booleene printr-un set independent de axiome. Există multe abordări ale subiectului care includ între axiome anumite teoreme, din rațiuni de simplificare a modului de prezentare.

Se poate trage o primă concluzie pe marginea aparatului formal introdus.

O algebră Booleană se definește, în general, peste o mulțime $K \supseteq \mathbf{B} \equiv \{0,1\}$ înzestrată cu două operații, notate aditiv $+$ și respectiv multiplicativ $*$, care satisfac legile de comutativitate și distributivitate. Mulțimea \mathbf{B} conține întotdeauna cele două elemente notate 0 și 1. Acestea sunt *elementele neutre* ale operatorului aditiv și, respectiv, multiplicativ:

$$a * 1 = a, a + 0 = a, \forall a \in \mathbf{B}.$$

În fine, oricare element a din \mathbf{B} are un complement, notat în cele ce urmează prin a' . Relațiile importante dintre un element și complementul său sunt enunțate astfel:

$$a * a' = 0 \text{ și } a + a' = 1, \forall a \in \mathbf{B}.$$

Este important, de reținut, că ambele elemente ale mulțimii \mathbf{B} nu trebuie privite ca fiind numere, sunt doar notate prin două numere. La fel de bine se pot utiliza alte două simboluri distincte, dar tradițional se utilizează 0 și 1.

Aceste simboluri corespund, din punct de vedere tehnologic, unor stări distincte ale unor dispozitive fizice care implementează operatorii acestor algebre.

Se poate remarca cu ușurință faptul că algebra Booleană diferă, ca structură algebrică, de algebra obișnuită prin distributivitatea ambilor operatori, pe de-o parte, și prin apariția complementului, pe de-altă parte.

O privire mai atentă asupra postulatelor lui Huntington relevă faptul că anumite postulate sunt grupate în perechi iar fiecare postulat dintr-o pereche poate fi obținut din celălalt postulat prin interschimbarea simbolurilor 0 și 1, ca și a operatorilor $+$ și $*$. Astfel se poate remarca:

$a + 0 = a$, prin interschimbarea amintită devine $a * 1 = a$, iar

$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$ se transformă în $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$.

Oricare teoremă care poate fi demonstrată în algebra booleană, are o teoremă duală care este, de asemenea, adevărată. Cu alte cuvinte, fiecare pas din demonstrația unei teoreme poate fi înlocuit prin dualul acestuia, producând demonstrația teoremei duale.

Teoremele fundamentale ale algebrei Booleene

În continuare sunt enunțate principalele teoreme, cele care permit o manipulare convenabilă a algebrei Booleene. Unele dintre teoreme sunt numite leme deoarece acestea au un rol mai limitat de aplicabilitate, furnizând relații utilizate în construcția demonstrației unor rezultate cu grad ridicat de generalitate, teoremele.

Atât lemele cât și teoremele vor fi enunțate dar vor fi demonstrate numai o parte (cele mai semnificative) demonstrațiile celorlalte leme și teoreme fiind lăsate ca exerciții.

Lema 1

Elementele 0 și 1 sunt unice.

Demonstrație: se presupune că există două elemente 0, notate prin 0_1 și 0_2 . În baza postulatului IIIa, pentru orice elemente w_1 și w_2 din \mathbf{K} au loc relațiile:

$$w_1 + 0_1 = w_1 \text{ și } w_2 + 0_2 = w_2.$$

Acum fie $w_1 = 0_2$ și $w_2 = 0_1$:

$$0_2 + 0_1 = 0_2 \text{ și } 0_1 + 0_2 = 0_1.$$

Utilizând comutativitatea operatorului + și proprietatea de tranzitivitate a egalității, rezultă:

$$0_1 = 0_2.$$

Prin dualitate se poate demonstra și unicitatea elementului 1. \square

Lema 2

Pentru orice element $w \in \mathbf{K}$ au loc relațiile:

$$w + w = w \text{ și}$$

$$w * w = w.$$

Lema 3

Pentru orice element $w \in \mathbf{K}$ au loc relațiile:

$$w + 1 = 1 \text{ și}$$

$$w * 0 = 0.$$

Lema 4

Elementele 0 și 1 sunt distincte iar $1' = 0$.

Lema 5

Pentru orice elemente w_1 și w_2 din \mathbf{K} au loc relațiile:

$$w_1 + w_1 w_2 = w_1, \text{ și}$$

$$w_1(w_1 + w_2) = w_1.$$

Lema 6

Complementul unui element $w \in \mathbf{K}$, w' , este unic.

Lema 7

Pentru orice element $w \in \mathbf{K}$, $(w')' = w$.

Lema 8

Oricare ar fi elementele u , v și $w \in \mathbf{K}$, are loc relația:

$$u * ((u + v) + w) = ((u + v) + w) * u.$$

Teorema 1

Oricare ar fi elementele u , v și $w \in \mathbf{K}$, au loc relațiile:

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \text{ și}$$

$$u * (v * w) = (u * v) * w.$$

Teorema 2

Pentru orice pereche de elemente u și $v \in K$, se verifică relațiile:

$$u + u'v = u + v \text{ și} \\ u(u' + v) = uv.$$

Teorema 3

Următoarele două relații sunt adevărate oricare ar fi elementele u și $v \in K$:

$$(u + v)' = u' * v' \text{ și} \\ (u * v)' = u' + v'.$$

Există și o *definiție alternativă* a algebrelor Booleene. Aceasta este utilizată, între altele, pentru construcții ale algebrelor Booleene definite ca latice complementate distributive. Acest mod de construcție leagă algebrele Booleene mai strâns de alte structuri matematice.

Definiția alternativă este orientată spre o abordare prin teoria mulțimilor (se va vedea, în continuare, motivația). Dacă S este o mulțime de n elemente, atunci există n^2 perechi de elemente $(u, v) \in S^2$ (produsul cartezian $S \times S$ se notează prin S^2).

Definiția 1

O relație R definită peste S^2 este o submulțime din S^2 , iar scrierea $(u, v) \in R \subseteq S^2$ este echivalentă scrierii $u R v$.

Există două categorii de relații care sunt de un interes particular în acest context:

- Relațiile de echivalență, și
- Relațiile de ordonare parțială.

Definiția 2

O relație de echivalență este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Reflexivitatea: $u R u$;

Simetria: dacă $u R v$, atunci $v R u$.

Tranzitivitatea: dacă $u R v$ și $v R w$, atunci $u R w$.

Introducerea relației de ordine parțială conduce la o latice.

Definiția 3

O ordonare parțială \leq peste S este o relație care satisface următoarele proprietăți pentru oricare trei elemente $u, v, w \in S$:

Reflexivitatea: $u \leq u$;

Antisimetria: dacă $u \leq v$ și $v \leq u$ atunci $u = v$;

Tranzitivitatea: dacă $u \leq v$ și $v \leq w$, atunci $u \leq w$.

Dacă P este o submulțime, a mulțimii parțial ordonate S , atunci elementul u din S este o *margină superioară* pentru P , dacă și numai dacă $p \leq u$, oricare ar fi p din P .

În mod similar elementul v din S este o *margină inferioară* pentru P , dacă și numai dacă $v \leq p$, oricare ar fi p din P .

Se notează prin U și V mulțimea tuturor marginilor superioare, respectiv inferioare pentru P . Dacă u_m din U este o margine superioară cu proprietatea $u_m \leq u$, oricare ar fi u din U , atunci se spune că u_m este cea mai mică margine superioară (*cmms*) pentru P și se notează prin

$\sup(P)$. Similar se introduce cea mai mare margine inferioară (*cmmmi*) care se notează prin $\inf(P)$.

Definiția 4

O mulțime parțial ordonată în care fiecare element are atât o cea mai mare margine inferioară cât și o cea mai mică margine superioară este o latice.

Prin inducție completă se poate arăta că în orice latice S există un cel mai mic element notat prin 0, astfel încât $0 \leq s$ pentru orice element s din S . În mod asemănător se arată existența unui cel mai mare element în S notat prin 1, cu proprietatea $s \leq 1$, oricare ar fi elementul s din laticea S . Dacă elementele p și q sunt din laticea S atunci, se notează, pentru ușurința scrierii, prin $p + q = \sup(p, q)$, iar prin $p * q = \inf(p, q)$.

Teorema 4

O latice complementată distributivă (o latice care satisface postulatele V și VI ale lui Huntington) este o algebră Booleană.

Demonstrație: Operatorii postulatului II au fost introduși prin \inf și respectiv \sup . Deoarece 0 este cel mai mic element atunci, $\sup(u, 0) = u + 0 = u$, iar dacă 1 este cel mai mare element atunci, $\inf(u, 1) = u * 1 = u$ ceea ce demonstrează satisfacerea postulatului III. Cel mai mic element $p * q = \inf(p, q)$, și respectiv cel mai mare element $p + q = \sup(p, q)$, nu depind de ordinea elementelor astfel încât sunt satisfăcute și legile postulatului IV. Deoarece postulatele V și VI au fost incluse în ipoteză, rezultă că laticea este o algebră Booleană. \square

Astfel, se poate arăta că $\forall a, b \in \mathbf{B}, \exists z \in \mathbf{B}$ astfel încât $z = \inf(a, b) = a \wedge b$ (se spune că z este marginea inferioară), și $\forall a, b \in \mathbf{B}, \exists t \in \mathbf{B}$ astfel încât $t = \sup(a, b) = a \vee b$ (se spune că t este marginea superioară). Privitor la operatorii \wedge și \vee se poate arăta că amândoi distribuie unul în raport cu celălalt și se poate, de asemenea, arăta că:

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbf{B}, \exists x' \in \mathbf{B} \text{ astfel încât} \\ &x \vee x' = 1, \text{ unde } 1 \text{ este elementul maxim, iar} \\ &x \wedge x' = 0, \text{ unde } 0 \text{ este elementul minim.} \end{aligned}$$

Proprietățile algebrelor Booleene

Spre deosebire de postulate, proprietățile sunt, în fapt, teoreme și de aceea sunt demonstrabile. Metoda generală de demonstrare a acestor proprietăți se bazează pe postulatele algebrelor Booleene utilizându-se mult inducția matematică.

(I) Asociativitatea:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c = a + b + c, \\ a * (b * c) &= (a * b) * c = a * b * c. \end{aligned}$$

(II) Idempotența:

$$\begin{aligned} a + a &= a, \\ a * a &= a. \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} a + 1 &= 1, \\ a * a &= a. \end{aligned}$$

(IV) Absorbția:

$$a + (a * b) = a,$$

$$a * (a + b) = a.$$

(V) Involuția:

$$(a')' = a$$

(VI) Legile De Morgan:

$$(a + b)' = a' * b',$$

$$(a * b)' = a' + b'.$$

(VII)

$$a + a' * b = a + b,$$

$$a * (a' + b) = a * b.$$

(VIII) Consensus:

$$a * b + a' * c + b * c = a * b + a' * c,$$

$$(a + b) * (a' + c) * (b + c) = (a + b) * (a' + c).$$

Exceptând proprietatea (V) Involuția, se poate remarca o dublă reprezentare a fiecărei proprietăți (identități, în fapt) ale algebrilor Booleene. Această remarcă se concretizează în „*principiul Dualității*”, așa cum este acesta formulat în definiția următoare.

Principiul Dualității

Orice identitate dintr-o algebră Booleană se transformă într-o altă identitate dacă au loc următoarele inter-schimbări:

Operatorii + și *,
Elementele 0 și 1.

Exemplul 2: Identitatea $a + 1 = 1$, se transformă, prin aplicarea principiului dualității, în identitatea: $a * 0 = 0$.

□

O algebră Booleană se identifică, tradițional, prin numele mulțimii suport, B . Există, în acest sens, următoarele exemple clasice:

Algebra comutatorilor,
Algebra submulțimilor unei mulțimi (numită și algebra claselor),
Algebra Booleană aritmetică,
Algebra Booleană a funcțiilor Booleene.

Algebra comutatorilor este un sistem algebric care constă din mulțimea $\{0,1\}$, doi operatori binari, notați ȘI (*), respectiv SAU (+), și un operator unar, notat NU ('), unde:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 * 0 = 0,$$

$$0 + 1 = 1, \quad 0 * 1 = 0, \quad 0' = 1,$$

$$1 + 0 = 1, \quad 1 * 0 = 0, \quad 1' = 0,$$

$$1 + 1 = 1, \quad 1 * 1 = 1.$$

Se remarcă faptul că, în conformitate cu definiția dată, algebra comutatorilor poate fi enunțată astfel: $(\{0,1\}, +, *, 0,1)$.

Se poate verifica ușor validitatea postulatelor pentru această algebră Booleană.

De reținut că există o proprietate exclusivă a acestei algebre:

$$a + b = 1 \text{ dacă și numai dacă } a = 1 \text{ ori } b = 1,$$

$$a * b = 0 \text{ dacă și numai dacă } a = 0 \text{ ori } b = 0.$$

Algebra submulțimilor este un sistem algebric construit peste o mulțime nevidă S ($S \neq \emptyset$) numită mulțimea univers, pentru care se consideră toate submulțimile distincte posibile ale acesteia. Dacă notăm prin $|S|$ cardinalitatea mulțimii S , atunci mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii S are $2^{|S|}$ elemente.

Această algebră are drept operator aditiv (+) reuniunea (\cup), iar intersecția (\cap) este operatorul multiplicativ (*).

Cu alte cuvinte, se poate scrie: $(\mathbf{K}, +, *, 0, 1) = (2^{|S|}, \cup, \cap, \emptyset, S)$, unde s-a notat mulțimea tuturor submulțimilor distincte ale mulțimii S prin $2^{|S|}$ (notația tradițională). Dacă $S = \{a, b\}$ atunci $\mathbf{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Verificarea postulatelor în acest caz este, de asemenea, simplă.

Remarcabil relativ la această algebră este de reținut teorema Stone (de reprezentare):

Teorema de izomorfism (Stone)

Orice algebră Booleană finită este izomorfă algebrei Booleene a submulțimilor unei anumite mulțimi finite S .

Algebra Booleană aritmetică se construiește peste numerele naturale.

Astfel, se consideră n numere prime distincte și fie p produsul acestora. Se notează prin D_n mulțimea tuturor divizorilor acestui produs (p). Se folosesc notațiile aritmetice consacrate, $cmmdc$ și $cmmmc$ pentru cel mai mare divizor comun și, respectiv, cel mai mic multiplu comun.

Se notează prin $\mathbf{1}$, numărul întreg $\mathbf{1}$ și va fi distinct de elementul $\mathbf{1}$ Boolean evidențiat în definiția algebrelor Booleene.

Atunci se poate scrie: $(\mathbf{B}, +, *, 0, 1) = (D_n, cmmmc, cmmdc, \mathbf{1}, p)$.

Dacă, spre exemplu, $p = 2 \times 3 \times 5 = 30$, atunci $D_n = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Este interesant de remarcat că atunci când D_n este privită ca fiind alcătuită din produse de divizori primi netriviali, și sunt utilizate în clar mulțimile acestor divizori, atunci se poate scrie o formulă apropiată, comparativ, celei realizate pentru algebra submulțimilor:

$D_n = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{2,3,5\}\}$,
deoarece $\mathbf{1}$ nu are nici un divizor netrivial.

Acum apare evident izomorfismul acestei algebre cu algebra submulțimilor unei mulțimi, în cazul de față exemplificându-se – pentru rațiuni de simplitate - cu doar trei elemente distincte.

Algebra binară este construită peste mulțimea suport minimală $\mathbf{B} = \{0,1\}$ iar operațiile binare + și * sunt disjuncția, respectiv, conjuncția, adesea denumite *sumă*, respectiv, *produs* sau, încă, SAU, respectiv ȘI.

Spațiul multidimensional descris de variabilele cu valori binare este notat prin \mathbf{B}^n . Acest spațiu mai este referit prin *culul n-dimensional (hipercub)* din cauza generalizării reprezentării spațiului \mathbf{B}^3 care geometric descrie un cub peste triedrul natural.

Un punct din \mathbf{B}^n este reprezentat printr-un vector cu n ranguri binare. Atunci când sunt asociate variabile binare dimensiunilor spațiului boolean \mathbf{B}^n , un punct se poate identifica prin valorile corespunzătoare acestor variabile. Un literal este o valoare, o instanțiere, a unei variabile sau a complementului acesteia. Un produs de n literali reprezintă un punct din

spațiul și se spune că reprezintă un cub zero-dimensional. Se utilizează curent referirea unui produs de literali prin denumirea generică *cub*.

Algebra funcțiilor Booleene de n variabile este construită astfel:

$(F_n(\mathbf{B}), +, *, 0, 1)$, unde:

- (i) $F_n(\mathbf{B})$ este mulțimea funcțiilor Booleene de n variabile definite peste \mathbf{B}^n , cu valori în \mathbf{B} , $n \geq 1$.
- (ii) $+$ reprezintă adunarea acestor funcții,
- (iii) $*$ reprezintă multiplicarea acestor funcții,
- (iv) 0 este funcția identic nulă, iar
- (v) 1 este funcția constantă 1.

Această algebră a funcțiilor scalare joacă un rol deosebit în fundamentele matematice ale analizei și sintezei dispozitivelor numerice pentru că operatorii și elementele acesteia se pot implementa prin dispozitive care se pot produce industrial în mod eficient. Studiul proprietăților acestei algebre arată modul în care sunt utilizabili operatorii și elementele acesteia pentru modelarea conceptelor dezvoltate în calculul algebrico-analitic tradițional.

Funcțiile Booleene

O funcție scalară din $F_n(\mathbf{B})$ *incomplet specificată* este definită peste o partiție a mulțimii \mathbf{B}^n . Valorile din domeniul de definiție (adesea referite generic prin *puncte*) unde funcția nu este definită, se numesc valori neprecizate ale funcției, sau, condiții neprecizate (*don't care*, este termenul anglo-saxon). Acești vectori din domeniul de definiție al unei funcții se referă, în fapt, la valori care nu sunt utilizate și, prin urmare valorile funcției respective nu sunt observate în acele puncte.

Un interes deosebit îl prezintă funcțiile vectoriale definite peste \mathbf{B}^n cu valori în \mathbf{B}^m unde $m > 1$. O astfel de funcție este considerată echivalentă unui vector de funcții din $F_n(\mathbf{B})$. Valorile neprecizate ale funcțiilor vectoriale pot fi distincte pentru fiecare dintre cele m componente ale respectivei funcții. Acest aspect se datorează faptului că punctele neprecizate pot fi proprii unor anumite componente ale vectorului de funcții. Din acest motiv funcțiile vectoriale incomplet specificate sunt considerate ca fiind definite peste \mathbf{B}^n , dar cu valori în mulțimea $\{0, 1, *\}^m$, unde prin simbolul $*$ s-a notat condiția de nedefinire, de neprecizare, a funcțiilor scalare. Pentru fiecare componentă scalară a unei funcții vectoriale se poate defini o partiție a domeniului de definiție după valorile luate. Astfel, toate punctele în care o funcție scalară ia valorile 0, 1 și $*$ se numesc, tradițional, 0-set, 1-set, și respectiv $*$ -set (*off set*, *on set* și respectiv *dc set*, în literatura anglo-saxonă). Nu există pericolul unei confuzii între notația punctelor din codomeniu desemnând valori nedefinite, pe de-o parte, și operatorul multiplicativ al acestei algebre deoarece tradițional operatorul multiplicativ este omis utilizându-se simpla juxtapunere (juxtapunerea a două variabile, spre exemplu, este echivalentă produsului acestora).

O generalizare, într-un anumit sens, a noțiunii de funcție booleană este *relația booleană*. O relație booleană este definită, în principiu, între spații Booleene. Astfel, unui punct dintr-un domeniu se asociază mai multe puncte din codomeniu (spre deosebire de funcții unde se asociază un singur punct din codomeniu). Relațiile Booleene și optimizarea acestora joacă un rol deosebit în sinteza și optimizarea circuitelor, rețelelor, multi-nivel.

Pentru funcțiile Booleene, în speță funcțiile de variabile binare cu valori binare, au fost introduse numeroase definiții și notații în vederea evidențierii unor aspecte analitice mai importante ale acestora. O parte dintre acestea, cele mai semnificative, vor fi, succint, enunțate în cele ce urmează.

Mulțimea variabilelor unei funcții este numită *mulțimea suport*, sau pe scurt, *suportul* funcției.

Reprezentări ale funcțiilor Booleene

Sunt posibile mai multe modalități de descriere ale unei funcții Booleene. O caracteristică comună a acestor funcții, care se va reflecta în toate aceste modalități de descriere, este faptul că funcțiile discrete de variabilă discretă au domeniul de definiție finit și implicit, astfel de funcții sunt reprezentabile prin enumerări finite. Adeseori, însă volumul enumerării acestor funcții poate fi considerabil sau chiar prohibitiv. Modalitățile de reprezentare pot fi clasificate ca fiind *formele tabelare*, *expresiile sau formulele Booleene* și *diagramele de decizii binare*.

Formele tabelare, cronologic fiind primele utilizate, pot fi privite ca fiind alcătuite din enumerări ordonate de perechi de valori constituite din punctul domeniului de definiție și valoarea funcției în respectivul punct. Ca mod de implementare au suport evident în alcătuirea memoriilor. Punctele sunt vectori binari, la fel și valorile funcției fiind binare scalare sau vectoriale. Au fost utilizate în aplicațiile de asistență automată a proiectării calculatoarelor în primele tentative de acest fel. Odată cu creșterea suportului funcțiilor reprezentarea devine incomodă iar metodele dezvoltate pentru acest mod de reprezentare nu s-au dovedit a fi printre cele mai performante.

Formulele Booleene, pe scurt formulele sau expresiile, au avantajul unei dezvoltări analitice de referință. Întreg aparatul teoretic utilizează această formă de reprezentare. Există numeroase aplicații care, sub o formă sau alta, sunt dezvoltate având la bază obiecte implementate prin structuri echivalente acestei forme de reprezentare. Ca formă de reprezentare are cele mai multe metode dezvoltate și cu performanțe printre cele mai bune. Dimensiunile reale ale funcțiilor reprezentabile prin formule sunt superioare celor reprezentabile prin formele tabelare. Printre obiectele dezvoltate cu această reprezentare cele mai cunoscute sunt cele corespunzătoare sumelor de produse (produselor de sume) în două sau mai multe nivele.

Diagramele de decizii binare (*Binary Decision Diagrams*, termenul în original, abreviat *BDD*) au fost inițial introduse de Lee și apoi reluate de Akers, pentru reprezentarea prin arbori sau grafuri aciclice direcționate cu rădăcini, a funcțiilor binare de variabile binare, scalare. Aceste reprezentări permit manipulări de funcții cu complexitate superioară celor reprezentabile prin formule Booleene.

Reprezentarea propusă de Akers utilizează pentru o decizie evaluarea unei variabile din suportul funcției. Utilizând această structură, ulterior, Bryant a introdus diagramele de decizii ordonate (*Ordered Binary Decision Diagrams*, cu abrevierea *OBDD*) și a demonstrat existența unor algoritmi performanți de manipulare a acestor forme de reprezentare.

Schimbând maniera de decizie prin evaluarea unei funcții în locul evaluării unei variabile, Karplus a introdus grafele aciclice direcționate numite ITE (abrevierea sintagmei *if-then-else*) apreciate ca fiind o generalizare a OBDD. Există funcții ale căror reprezentări prin ITE sunt mai compacte decât prin OBDD.

Formulele Booleene

Există numeroase situații în care anumite proprietăți ale unor dispozitive, reale sau simulate, virtuale, sunt exprimate prin formule construite peste algebrele Booleene. Există o legătură de mare importanță între formulele Booleene, pe de-o parte, și funcțiile Booleene, pe de-altă parte.

O variabilă Booleană este o variabilă care ia valori din mulțimea B . Prin *literal* se înțeleg variabile Booleene care pot fi asertate sau complementate (negate). Variabilele sunt cele mai simple exemple de funcții Booleene.

Expresiile construite prin simboluri legate prin operatorii $*$ și $+$ sunt cele mai simple exemple de formule Booleene. Formulele pot fi dezvoltate ierarhic utilizând paranteze. O formulă booleană se definește după cum urmează.

Definiția 2: Se consideră o algebră Booleană B și n simboluri x_1, x_2, \dots, x_n , atunci mulțimea formulilor Booleene peste cele n simboluri este alcătuită din:

1. Elementele mulțimii B care sunt formule,
2. Simbolurile x_1, x_2, \dots, x_n care sunt formule,
3. Dacă g și h sunt formule, atunci tot formule sunt și
 - $(g) + (h)$,
 - $(g) * (h)$ și
 - $(h)'$.

Un șir de caractere este o formulă Booleană dacă și numai dacă aceasta se obține printr-un număr finit de aplicări ale regulilor 1, 2 și 3.

□

Se poate remarca din definiția anterioară că numărul formulilor Booleene de n variabile este *infinit*.

Este esențial de văzut modul în care unei formule Booleene F , corect definite, i se poate asocia o funcție Booleană, de asemenea, corect definită.

Se consideră F , o formulă Booleană conținând n simboluri, atunci funcția f , de n variabile, corespunzătoare acestei formule se definește astfel:

Definiția 3: Dacă $F = b \in B$, atunci formula reprezintă funcția constantă definită prin:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n;$$

Dacă $F = x_i$, atunci formula reprezintă o *funcție proiecție* definită prin:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n;$$

Dacă formula este de forma $G + H$, ori $G * H$, ori G' , atunci funcția de n variabile corespunzătoare se definește după cum urmează:

$$(g + h)(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) + h(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(g * h)(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) * h(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(g')(x_1, x_2, \dots, x_n) = (g(x_1, x_2, \dots, x_n))'$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n.$$

Numărul de funcții Booleene de n variabile definite peste o algebră booleană finită este *finit*.

Exemplul 2. Se consideră algebra construită peste mulțimea $B = \{0, 1, a', a\}$.

Se consideră mulțimea simbolurilor ca fiind $\{x, y\}$, atunci, o formulă Booleană cu aceste două simboluri poate fi, spre exemplu, $F = a' * x + a * y'$. (Tradițional operatorul $*$ se poate omite, fiind subînțeles, utilizându-se simpla juxtapunere a simbolurilor.)

Funcția Booleană de două variabile $f: B^2 \rightarrow B$, corespunzătoare formulei Booleene $F = a' * x + a * y'$, va avea domeniul de definiție:

$B^2 = \{(0,0), (0,1), (0,a'), (0,a), (1,0), (1,1), (1,a'), (1,a), (a',0), (a',1), \dots\}$ și poate fi definită punctual (deoarece domeniul de definiție este finit) evaluând expresia considerată în fiecare punct al domeniului de definiție:

$$f(0,0) = a, f(0,1) = 0, f(0,a') = a, f(0,a) = 0, f(1,0) = 1, \dots$$

□

Teorema de descompunere a unei funcții Booleene (Claude Shannon).

Fie $f: B^n \rightarrow B$ o funcție Booleană, atunci are loc identitatea:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1' f(0, x_2, \dots, x_n) + x_1 f(1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n,$$

□

Formulele canonice

Formulele canonice de reprezentare ale unei funcții sunt unice pentru o funcție dată. Există forme canonice din categoria expresiilor Booleene, dar există și forme canonice din categoria diagramelor de decizii binare, acestea sunt diagramele de decizii binare ordonate.

Atunci când se compară două forme canonice se ține seama de specificul respectiv. Astfel, dacă se compară reprezentări canonice OBDD atunci comparația va avea loc între doi arbori sau două grafe aciclice orientate cu rădăcini.

Astfel de forme sunt utile atunci când se compară două funcții în vederea stabilirii identității lor. Adeseori în proiectare se aleg anumite formule de reprezentare ale unei funcții în funcție de natura tehnologiei utilizate, criteriile de performanță etc. Pentru evitarea unor erori care pot apărea în procesul de calcul al unei formule de implementare pentru o funcție dată se procedează, în general, la validarea funcțională a formulei implementate. Există mai multe metode de validare funcțională. Una dintre cele mai simple este calculul formei atât pentru funcția considerată cât și pentru formula sa de implementare.

Teorema de reprezentare

O funcție $f: B^n \rightarrow B$ este Booleană dacă și numai dacă aceasta poate fi exprimată prin identitatea:

$$f(X) = \sum_{A \in \{0,1\}^n} f(A) X^A$$

În identitatea de mai înainte s-au utilizat notațiile :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n, \text{ iar } X^A = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

Prin expresia $x_i^{a_i}$ se înțelege x_i' dacă $a_i = 0$, și x_i dacă $a_i = 1$. Termenii produs X^A astfel construiți se numesc mintermi și sunt fiecare în parte unic asociați unui anumit punct din domeniul de definiție al funcției.

Prezența lor în forma canonică disjunctivă este validată de valorile (nenule) corespunzătoare ale funcției.

Demonstrația acestei teoreme decurge simplu, utilizând sistematic teorema Shannon.

□

Exemplul 3

Se consideră o funcție de trei variabile (cazul $n = 3$). Aplicând teorema de reprezentare se obține următoarea formulă canonică:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & f(0,0,0)x_1'x_2'x_3' + f(0,0,1)x_1'x_2'x_3 + f(0,1,0)x_1'x_2x_3' + \\ & f(0,1,1)x_1'x_2x_3 + f(1,0,0)x_1x_2'x_3' + f(1,0,1)x_1x_2'x_3 + f(1,1,0)x_1x_2x_3' + \\ & f(1,1,1)x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Termenii produs utilizați, mintermi, sunt prezenți în formula canonică disjunctivă a unei funcției oarecare dacă funcția respectivă are valori nenule în punctele corespunzătoare.

Se remarcă faptul că formula reflectă valorile funcției în toate punctele domeniului său de definiție. Particularizarea sau *personalizarea* formulei canonice este exclusiv dependentă de aceste valori.

□