Utilizarea diagramelor Karnaugh în minimizarea funcţiilor logice

Diagramele Karnaugh sunt reprezentări grafice, simple ale funcţiilor şi expresiilor logice. Aceste diagrame permit o reprezentare convenabilă a funcţiilor cu un număr relativ mic de variabile (5 - 6 variabile reprezintă o limită rezonabilă a metodei) şi sunt mult utilizate în calculul manual al formelor minimizate.

1. Introducere

Aceste diagrame unt foarte utile pentru generarea manuală a setului complet de implicanţi de primi ai unei funcţii scalare dar şi pentru determinarea acoperirii optime, în cazurile mai simple. Diagramele Karnaugh sunt forme tabelare rectangulare, având 2^k celule (k fiind numărul de variabile al diagramei), în care fiecare celulă a diagramei este prin identificată printr-o etichetă orizontală şi una verticală. Etichetele sunt cuvinte ale codului binar reflectat Gray.

Codul Gray cel mai simplu este cel cu un singur rang. Pentru acest cod sunt doar două cuvinte: 0 şi 1. Codul Gray cu două ranguri are patru cuvinte: 00, 01, 11 şi 10.
Printre proprietăţile generice ale codului Gray, invariante cu numărul de ranguri, sunt de reţinut câteva remarcabile:

- Diferenţierea unică între două cuvinte succesive. Două cuvinte succesive ale codului Gray se deosebesc prin cel mult un rang.
- Primul şi ultimul cuvânt de cod satisfac, deasemenea, această proprietate. Acest fapt conferă ciclicitate codului Gray.
- Cuvintele codului Gray cu n ranguri se deduc din cuvintele codului Gray cu n-1 ranguri printr-o generare pseudo-simetrică.

Exemplul 1.1. Se consideră codul Gray cu două ranguri : 00, 01, 11, 10.
Generarea codului Gray cu trei ranguri se poate face astfel:
Cuvintele codului Gray cu două ranguri sunt modificate prin adăugarea unui rang în stânga rangurilor existente iar valoarea acestui rang suplimentar este 0 pentru toate cuvintele de cod:

000, 001, 011, 010 **|**

În continuare, se generează în dreapta barei verticale, pseudo-simetric celelalte cuvinte de cod care vor avea valoarea 1 a rangului suplimentar introdus:

000, 001, 011, 010 **|** 110, 111, 101, 100.

În concluzie, codul Gray cu trei ranguri are cuvintele de cod:
000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.
◊

Doi mintermi (maxtermi) se spune că sunt logic adiacenţi atunci când aceştia diferă printr-o singură variabilă.
Aceasta revine la a spune, în fapt, că o variabilă (u spre exemplu) apare într-un minterm asertată (u) iar în celălalt complementată (u').

În diagramele Karnaugh, datorită codului Gray, două celule învecinate (în mod imediat ori extins, prin exterior) atât pe verticală cât şi pe orizontală diferă prin paritatea unei singure variabile.

Dacă vecinătatea este orizontală, atunci variabila care va avea paritate diferită (în sensul că, apare la o celulă asertată în timp ce la cealaltă celulă apare complementată) aparţine codurilor orizontale ale celulelor.
Similar pentru vecinătatea verticală. Doi astfel de mintermi se pot combina şi produc un implicant (având o variabilă mai puţin) în baza proprietăţilor algebrelor Boole-ene.
Cu alte cuvinte, diagramele Karnaugh transformă adiacența logică într-o adiacenţă sesizabilă vizual a mintermilor.
Această trăsătură fundamentală este observabilă atunci când se traversează diagrama, pe direcţie verticală (în lungul unei coloane) ori pe direcţie orizontală (de-a lungul unei linii).
Prin proprietatea aceasta se facilitează mult generarea implicanţilor primi (maximali).
Generarea implicanţilor primi, pentru un anumit minterm, are loc prin cuprinderea unui număr de celule într-o grupare materializată printr-un contur (închis ori prin extindere închis) care delimitează gruparea respectivă.

b \ *a*	0	1
0	0	2
1	1	3

(a) Două variabile

c \ *ab*	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

(b) Trei variabile

cd \ *ab*	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

(c) Patru variabile

de \ *abc*	000	001	011	010	100	101	111	110
00	0	4	12	8	16	20	28	24
01	1	5	13	9	17	21	29	25
11	3	7	15	12	19	23	31	27
10	2	6	14	10	18	22	30	26

(d) Cinci variabile

def \ *abc*	000	001	011	010	100	101	111	110
000	0	8	24	16	32	40	56	48
001	1	9	25	17	33	41	57	49
011	3	11	27	19	35	43	59	51
010	2	10	26	18	34	42	58	50
100	4	12	28	20	36	44	60	52
101	5	13	29	21	37	45	61	53
111	7	15	31	23	39	47	63	25
110	6	14	30	22	38	46	62	54

(e) Şase variabile

Figura 1.1. Diagramele Karnaugh cele mai utilizate.

Locaţia unui minterm, în diagrama Karnaugh, are în imediata vecinătate locaţiile mintermilor potenţiali adiacenţi.

În figura 1.1 sunt prezentate diagramele Karnaugh utilizate curent. Aşa cum se poate remarca din figura 1.1, celulele din diagramele Karnaugh sunt identificabile atât, prin indicii coloanelor şi liniilor, cât şi prin valorile zecimale unice înscrise în respectivele celule.

Celula din prima coloană (indice 0) şi prima linie (indice 0) este etichetată în ordine 00 iar celula din prima coloană şi a doua linie (indice 1) este, similar, etichetată 01, spre exemplu, în figura 1.1 (a).
Indicii liniilor şi coloanelor sunt interpretaţi simbolic utilizând corespondenţa bijectivă care asociază, poziţional, variabila respectivă complementată unei valori zero şi respectiv asociază variabila respectivă asertată unei valori unu.
Astfel, prima coloană are eticheta *a'* iar cea de-a doua coloană are eticheta literală, simbolică, *a,* spre exemplu, în figura 1.1 (a).
Similar, se poate remarca faptul că prima linie este etichetată simbolic prin literalul *c'd',* în timp ce a doua linie are eticheta simbolică *c'd*, în figura 1.1 (c) corespunzătoare diagramei Karnaugh pentru patru variabile.

Valoarea zecimală din interiorul celulelor este determinată prin *vectorul ordonat al indicilor de coloană şi respectiv linie*.
Astfel, celula din ultima coloană şi prima linie este unic identificabilă numeric prin eticheta obţinută din combinaţia 10 (simbolic *ab'*), în figura 1.1 (a). Similar, celula din prima coloana şi a doua linie, în figura 1.1 (a), este unic identificabilă numeric prin eticheta 01 (simbolic *a'b*), etc.
Acest procedeu este corespunzător extensibil şi pentru diagramele Karnaugh pentru trei sau mai multe variabile. Celula din a prima coloană şi doua linie a diagramei Karnaugh cu patru variabile (figura 1.1 (c)) este identificabilă prin eticheta 0001 (simbolic *a'bc'd*), spre exemplu.

Etichetelor celulelor li se ataşează, în ordine ponderi. Aceste ponderi sunt, puteri în baza doi.
În cazul diagramei Karnaugh pentru două variabile (din figura 1.1(a)), ponderile sunt 2^1, 2^0, spre exemplu. Iar, în cazul diagramei pentru cinci variabile (figura 1.1 (d)) ponderile, sunt în ordine 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, asociate variabilelor *abcde,* respectiv.

Aceste ponderi fac posibilă asocierea unei valori zecimale unice fiecărei celule. Pentru fiecare diagramă, din figura 1.1, este înscrisă, în fiecare celulă, valoarea zecimală corespunzătoare. Valorile zecimale înscrise în celulele diagramelor sunt identice cu indicii mintermilor corespunzători respectivelor celule. Această asociere uşurează mult completarea corectă a diagramelor Karnaugh.
Celula cu valoarea zecimală 47, spre exemplu, din diagrama figurii 1.1 (e) corespunde mintermului m_{47} notat simbolic prin produsul variabilelor *ab'cdef,* având respectiv codul binar 101111.

Diagrama Karnaugh pentru funcţiile cu cinci variabile (figura 1.1(d)), a fost alcătuită din două diagrame de patru variabile fiecare, pentru simplitatea utilizării în acest caz.
Diagrama din partea dreaptă a figurii 1.1(d) corespunde atribuirii a = 0 iar diagrama din partea stângă corespunde atribuirii a = 1. Cele două diagrame sunt într-o relaţie de adiacenţă.
Acesta este motivul pentru care s-au utilizat două diagrame pentru patru variabile chiar dacă sunt specificate cinci variabile.

Similar, în cazul diagramei Karnaugh pentru şase variabile, privite atent cele patru diagrame pentru patru variabile fiecare sunt într-o relaţie de adiacenţă asemănătoare celei dintr-o diagramă Karnaugh pentru două variabile (*a* şi *d*).

2. Reprezentarea funcţiilor scalare utilizând diagramele Karnaugh

c \ ***ab***	00	01	11	10
0	**1**			**1**
1	**1**			

$f\,(a, b, c) = m_0 + m_1 + m_4.$

Figura 2.1. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificate prin mintermi.

Celulelor digramelor Karnaugh le sunt atribuite valori 0 sau 1 după cum sunt definite funcţiile reprezentate.

> **<u>Exemplul 2.1.</u>** Fie funcţia $f\,(a, b, c) = m_0 + m_1 + m_4$.
> O reprezentare utilizând o diagramă Karnaugh pentru trei variabile (*a, b* şi *c*) va avea trei unităţi, corespunzătoare celor trei mintermi ai funcţiei, aşa cum se poate vedea din figura 2.1. Celelalte celule se presupune, implicit, că au valoarea 0. Din raţiuni de simplitate se preferă doar evidenţierea celulelor care au valoarea 1.
> ◊

În mod uzual nu sunt reprezentate explicit valorile zero ale funcţiilor în diagramele Karnaugh. Dar pentru o prezentare completă se arată, în continuare, un exemplu în care o funcţie este reprezentată prin maxtermi (sunt semnificative, la această reprezentare, valorile zero ale respectivei funcţii.)

cd \ ***ab***	00	01	11	10
00		**0**		
01	**0**			**0**
11				
10			**0**	**0**

$g\,(a, b, c, d) = M_1 \cdot M_4 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{14}$

Figura 2.2. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificată prin maxtermi.

> **<u>Exemplul 2.2.</u>** Fie funcţia $g(a, b, c, d) = = M_1 \cdot M_4 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{14}$.
> O reprezentare a acestei funcţii utilizând o diagramă Karnaugh pentru patru variabile (*a, b, c* şi *d*) va avea cinci celule iniţializate cu valoarea 0, tot atâtea câţi maxtermi sunt utilizaţi în specificarea funcţiei (figura 2.2).
> Celelalte celule se presupune, implicit ca având valoarea 1. Tot din raţiuni de simplitate se face doar marcarea celulelor pentru care funcţia are valoarea 0.
> ◊

Atunci când funcţiile sunt specificate prin sume de produse ne-canonice (implicanţi oarecari) se poate proceda în două maniere:

(a) termenii necanonici sunt expandaţi în termeni canonici (mintermi) după care completarea diagramei se face ca în exemplul 2.1, sau

(b) diagrama Karnaugh este completată prin considerarea ariilor corespunzătoare termenilor produse necanonice, aşa cum se arată în Exemplul 2.3.

		ab 00	01	11	10
c	0	**1**			**1**
	1				**1**

$h\ (a, b, c) = ab' + b'c'$.

Figura 2.3. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificate prin implicanţi necanonici.

<u>Exemplul 2.3.</u> Se consideră funcţia $h(a, b, c) = ab' + b'c'$.
În continuare se va utiliza indicele zecimal pentru identificarea fiecărei celule din diagrama Karnaugh (figura 1.1 (b)).
Variabila *a* corespunde mulţimii celulelor {4, 5, 6 şi 7}. Se poate afirma, cu alte cuvinte, toate celulele pentru care a = 1.

Pentru b' vor fi considerate celulele din mulţimea {0, 1, 4 şi 5} (toate celulele unde b' = 1). Atunci, pentru produsul ab' va corespunde intersecţiei celor două mulţimi specificate anterior: {4, 5, 6 şi 7} $\cap$ {4, 5, 6 şi 7} = {4 şi 5}.

Similar, pentru produsul $b'c'$ se vor intersecta mulţimile de celule {0, 1, 4 şi 5} şi {0, 2, 6 şi 4} (cea de-a doua mulţime corespunde celulelor pentru care c' =1). În consecinţă, pentru $b'c'$ se va utiliza mulţimea {0 şi 4}. În final se reunesc (+) cele două mulţimi de celule determinate: {4 şi 5} $\cup$ {0 şi 4} = {0, 4 şi 5}. Funcţia va fi reprezentată prin doar trei unităţi, plasate în cele trei celule aşa cum se poate vedea în figura 2.3.
◊

Ca o concluzie, faţă de exemplul 2.3, se poate afirma că pentru o funcţie (cu *n* variabile) descrisă, între alţi implicanţi, printr-un implicant care are doar *p* variabile ($p < n$) atunci, se vor iniţializa prin 1, în total 2^{n-p} celule din respectiva diagramă Karnaugh.
Următorul exemplu abordează o problemă similară dar în cazul unei funcţii specificate prin implicaţi (termeni produs) necanonici.

		ab 00	01	11	10
c	0		**0**		
	1		**0**	**0**	

$j(a, b, c) = (a + b')(b' + c')$.

Figura 2.4. Reprezentarea printr-o diagramă Karnaugh a unei funcţii specificate prin implicaţi necanonici.

<u>Exemplul 2.4.</u> Se consideră funcţia $j(a, b, c) = (a + b')(b' + c')$.
Procedeul de reprezentare printr-o diagramă Karnaugh pentru produse de implicaţi necanonici stabileşte, pentru început celulele din diagramă în care funcţia are valori 0. Astfel, pentru ca primul produs să fie 0 trebuie ca atât a = 0 cât şi ca b'= 0, cu alte cuvinte a = 0 şi b = 1, ceea ce desemnează a doua coloană din stânga diagramei Karnaugh din figura 2.4.

Cel de-al doilea implicat $b' + c' = 0$, conduce la concluzia $b = 1$ şi $c = 1$, ceea ce indică intersecţia dintre coloanele $b = 1$ şi linia $c = 1$ rezultând încă o celulă iniţializată prin zero (celula $abc = 0$).
Reprezentarea acestei funcţii printr-o diagrama Karnaugh corespunzătoare este înfăţişată în figura 2.4.
◊

3. Minimizarea funcţiilor scalare reprezentate prin sume de produse

Minimizarea exactă a funcţiilor scalare reprezentate prin diagramele Karnaugh va urma teorema Quine. Astfel, minimizarea are două etape:

- Calculul mulţimii tuturor implicanţilor primi, şi
- Determinarea soluţiilor corespunzătoare mulţimii tuturor implicanţilor.

Stabilirea implicanţilor primi ai unei funcţii reprezentate printr-o diagramă Karnaugh este mult facilitată de proprietăţile de adiacenţă geometrică ale acestei diagrame.
Pentru o mai clară înţelegere a minimizării funcţiilor logice combinaţionale scalare utilizând diagramele Karnaugh se consideră un exemplu simplu.

Exemplul 3.1. Se consideră funcţia $h(u,v) = m_0 + m_2 + m_3$. Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcţii cu două variabile este prezentată, pentru o simplă urmărire a procedeului, în figura 3.1 (a) iar reprezentarea funcţiei h este prezentată în figura 3.1(b).

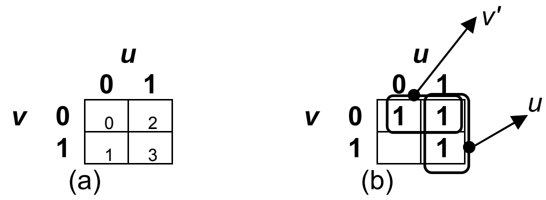


Figura 3.1.
(a) Diagrama Karnaugh generică pentru funcţii cu două variabile.
(b) Reprezentarea funcţiei din exemplul 3.1 printr-o diagramă Karnaugh.

Diagrama generică are în fiecare din cele patru celule înscris un număr, corespunzător indexului mintermului asociat respectivei celule. Astfel, deoarece funcţia h are trei mintermi, s-au înscris, corespunzător, trei unităţi pentru cei trei mintermi (figura 3.1(b)).

Cele două contururi din figura 3.1(b) vin să puncteze asocierile, în vederea minimizării funcţiei, dintre cei trei mintermi. Cei trei mintermi sunt $m_0 = u'v'$, $m_2 = uv'$ şi $m_3 = uv$.
Conform primului contur, cel orizontal, se scrie expresia: $m_0 + m_2 = u'v' + uv' = (u' + u)v' = v'$.

Similar, pentru cel de-al doilea contur, se scrie expresia: $m_3 + m_2 = uv + uv' = (v' + v)u = u$.
De remarca faptul că unitatea corespunzătoare mintermului $m_2 = uv'$, a fost implicată în două contururi distincte datorită proprietăţii generale $a + a = a$.

Se poate concluziona asupra unei proprietăţi esenţiale a diagramelor Karnaugh:

- O pereche de unităţi adiacente cuprinse într-un contur produc un implicant care are o variabilă mai puţin.
- Variabilele care s-au păstrat au paritate constantă în conturul respectiv (adică, sunt fie constant asertate, fie constant complementate).

Fiecare contur a determinat câte un implicant, respectiv $p = v'$ şi $q = u$. Se poate uşor constata faptul că ambii implicanţi sunt primi (funcţia are doar două variabile).

Tabelul incidenţei implicanţilor primi, pentru această funcţie, arată astfel:

Tabelul 3.1

	m_0	m_2	m_3	
p	**∗**	∗		*e*
q		∗	**∗**	*e*

Se remarcă, în tabelul 3.1, faptul că atât *p* cât şi *q* sunt implicanţi primi esenţiali (mintermul m_0 este acoperit în exclusivitate de implicantul prim *p*, iar mintermul m_3 este în aceeaşi relaţie cu implicantul prim *q*). S-au scris cu caractere îngroşate unităţile care desemnează respectivul implicant prim ca fiind esenţial. Astfel, în dreptul intersecției dintre coloana $\boldsymbol{m_0}$ şi linia ***p***, unitatea respectivă este îngroşată, spre exemplu.
În coloana din extremitatea dreaptă a tabelului implicanţilor primi s-a marcat prin caracterul *e,* această proprietate a implicanţilor primi.
Rezultă, în final, această expresie minimizată pentru funcţia considerată: $h(u,v) = u + v'$.
◊

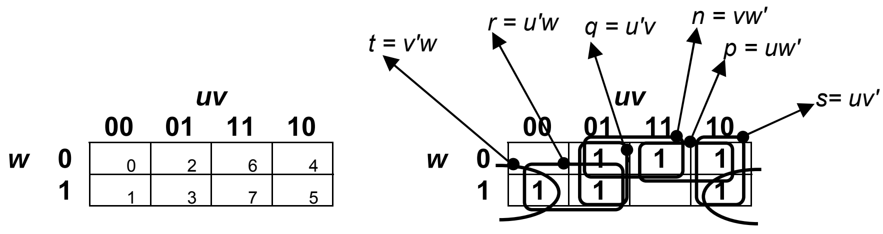
Aşa cum s-a putut vedea în exemplul 3.1 toate contururile desenate peste două unităţi vecine, dintr-o diagramă Karnaugh pentru două variabile, au produs doi implicanţi primi, în acest caz.
Obţinerea mulţimii tuturor implicanţilor primi, dintr-o diagramă Karnaugh, se realizează prin determinarea tuturor contururilor maxime, în diagrama respectivă, care pot fi ataşate fiecărei celule marcate (prin 1 ori prin 0, după cum s-a realizat reprezentarea). În exemplul 3.1 s-au putut trasa doar două contururi peste cele trei unităţi din diagramă.
După cum s-a putut remarca, din figura 3.1(b), atunci când două unităţi (învecinate) sunt prinse într-un contur rezultă, în general, un implicant care are o variabilă mai puţin. Variabila redusă corespunde variabilei care în respectivul contur, cu două unităţi, îşi schimbă paritatea (adică, apare atât asertată cât şi complementată).
Un contur, în general, va genera un implicant care va păstra doar variabilele care au aceeaşi paritate de-alungul conturului respectiv.

Contururile, în general, pot include o unitate, două unităţi, patru unităţi, 16 unităţi, etc în general o expresie de forma 2^p.
Din raţiuni de natură pragmatică se recomandă să se utilizeze diagramele Karnaugh pentru funcţii al căror număr de variabile *n* să fie relativ mic, $n < 8$.

Exemplul următor introduce utilizarea diagramei Karnaugh pentru minimizarea funcţiilor cu trei variabile.

<u>*Exemplul 3.2.*</u> Se consideră funcţia $f(u, v, w) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$.
În figura 3.2 (a) este prezentată diagrama Karnaugh generică, pentru funcţiile cu trei variabile.
Astfel, deoarece funcţia *f* este reprezentată prin şase mintermi, s-au înscris, corespunzător, şase unităţi pentru cei şase mintermi (figura 3.2(b)).

Contururile desenate în figura 3.2(b) epuizează toate posibilităţile de grupare de unităţi, două câte două, ataşate fiecărei unităţi.
Cu alte cuvinte, s-au trasat prin fiecare unitate din diagramă toate contururile maximale posibile.



(a) (b)

Figura 3.2.
(a) Diagrama Karnaugh, generică, pentru funcţiile cu trei variabile.
(b) Diagrama Karnaugh pentru funcţia din exemplul 3.2.

Este introdus şi un contur deosebit (pentru cele două unităţi aflate în extremităţile ultimei linii). Acesta sugerează cuprinderea celor două unităţi (corespunzătoare mintermilor m_1 şi m_5) printr-un contur generalizat. Acest contur extins, generalizat (prin exteriorul diagramei) este trasat în baza vecinătăţii unităţilor respective (ciclicitatea codului Gray).

Implicanţii generaţi prin aceste contururi sunt etichetaţi astfel:

$$n = m_2 + m_6,\ p = m_6 + m_4,\ q = m_2 + m_3,\ r = m_1 + m_3,\ s = m_4 + m_5,\ t = m_1 + m_5.$$

Aceşti implicanţi au următoarele expresii algebrice:

$$n = vw',\ p = uw',\ q = u'v,\ r = u'w,\ s = uv',\ t = v'w.$$

Mulţimea implicanţilor generaţi este maximă. Nu mai există alţi implicanţi, pentru această funcţie, în afară de aceştia (nu se mai pot genera alte contururi).

Toţi implicanţii generaţi sunt primi întrucât nu există alţi implicanţi ori reuniuni de implicanţi care să-i conţină, aşa cum se poate repede dovedi (contururile sunt fiecare, în parte, maxime).

Tabelul 3.2 al incidenţelor dintre implicanţii primi şi mintermii acestei funcţii arată astfel:

Tabelul 3.2

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	
n		∗				∗	
p				∗		∗	*e*
q		∗	∗				
r	∗		∗				*e*
s		∗	∗				
t					∗	∗	*e*

Implicantul *r* este esenţial, deoarece acoperă în exclusivitate mintermul m_1, aşa cum se poate remarca în tabelul 3.2.
Similar, implicantul *p* este esenţial (acoperă în exclusivitate mintermul m_4), după cum şi implicantul *t* este esenţial (acoperă în exclusivitate mintermul m_5).

Aceşti trei implicanţi primi esenţiali vor face parte din orice acoperire minimală iredundantă a funcţiei *f*. În tabelul implicanţilor s-au marcat implicanţii primi esenţiali prin caracterul *e* plasat în stânga tabelului, în dreptul liniilor respective.

Se aplică metoda lui Petrick tabelului cu implicanţi primi.
Clauza care stabileşte acoperirea primului minterm m_1, este *r*.

În mod asemănător, se poate deduce clauza relativă la cel de-al doilea minterm m_2. Aceasta este $n + q + s$.
Similar, clauza care stabileşte acoperirea mintermului m_3, este $q + r + s$, după cum clauza care determină acoperirea mintermului m_6 este $n + p + t$.
Clauza mintermului m_5, este t, iar clauza mintermului m_4, este p.
Produsul lui Patrick, al clauzelor de acoperire ale fiecărui minterm, arată astfel:

$$r(n + q + s)(q + r + s)pt(n+p+t) = 1,$$

Se poate remarca:

$$r(q + r + s) = r$$

şi

$$t(n+p+t) = t,$$

ceea ce micşorează sensibil efortul de calcul Boole-an al produsului de sume, deoarece rămâne de calculat doar:

$$r(n + q + s)pt = 1,$$

rezultând în final:

$$nprt + pqrt + prst = 1.$$

În consecinţă, pentru această funcţie, sunt posibile trei acoperiri prime iredundante având aceeaşi cardinalitate:

(a) $f(u, v, w) = vw' + uw' + u'w + v'w$, (corespunzător termenului *nprt*);
(b) $f(u, v, w) = uw' + u'v + u'w + v'w$, (corespunzător termenului *pqrt*);
(c) $f(u, v, w) = uw' + uv' + u'w + v'w$, (corespunzător termenului *prst*).
◊

Exemplul care urmează vizează utilizarea, în continuare, a diagramei Karnaugh pentru trei variabile şi introduce alte contururi tipice pentru această diagramă.

Exemplul 3.3. Patru funcţii Booleene *f, g, h* şi *j* sunt definite după cum urmează:

$f(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6$,
$g(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_7$,
$h(u, v, w) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$,
$j(u, v, w) = m_1 + m_2 + m_4 + m_7$.

Cele patru funcţii sunt reprezentate prin diagramele Karnaugh corespunzătoare din figura 3.3 (a), (b), (c) şi respectiv (d).

Pentru funcţia *f* sunt desenate două contururi, ambele cu câte patru unităţi, aşa cum se poate remarca în figura 3.3 (a).
Primul contur, care cuprinde prima linie din diagramă, poate fi considerat ca fiind compus din reuniunea (suma) a două contururi vecine, adiacente logic, fiecare cu câte două unităţi, de forma:

$$(m_0 + m_2) + (m_6 + m_4) = (u'w') + (uw') = w'.$$

Se poate remarca faptul că expresiile anterioare, $u'w'$ şi uw', sunt adiacente logic (diferă printr-o singură variabilă (u) care în prima expresie este complementată, în timp ce în cea de-a doua este asertată).

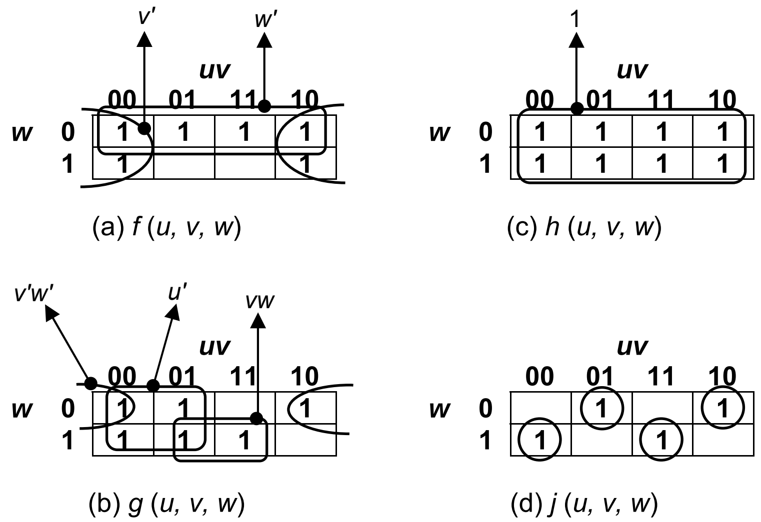


Figura 3.3. Diagramele Karnaugh pentru funcţiile *f, g, h* şi *j* din exemplul 3.3.

Acest fapt conduce la concluzia că două contururi distincte adiacente, cu câte două unităţi fiecare se pot grupa sub un contur desenat peste cele patru unităţi respective. Conturul rezultat va produce un implicant care va avea două variabile mai puţin. Un astfel de contur este, adesea, numit contur linie (ori coloană).

Similar, conturul care cuprinde, de asemenea, patru unități format prin exteriorul diagramei (contur extins) peste cele două coloane din marginile diagramei, poate fi considerat ca fiind alcătuit din reunirea a două contururi adiacente care închid fiecare câte două unităţi:

$$(m_0 + m_1) + (m_4 + m_5) = (u'v') + (uv') = v'.$$

Contururile cu câte patru celule adiacente imediat ori prin extensie de forma celui descris se numesc adesea careuri.

În concluzie, se poate observa că un contur cu patru unităţi va crea un implicant care păstrează doar două variabile, acelea care au paritate constantă în conturul respectiv.

Se poate observa, pentru reprezentarea funcţiei *f* din figura 3.3.(a), că nu există alte contururi, mai mari care să includă (cuprindă) contururile existente şi nici nu există contururi distincte de cele deja trasate.

Aceasta arată, pe de-o parte, că aceste contururi corespund unor *implicanţi primi* (nu există alte contururi mai mari care să le includă pe acestea). Iar, pe de-altă parte, faptul că nu mai există alte contururi distincte, afară de cele deja trasate, arată *completitudinea mulţimii implicanţilor primi* desemnaţi de respectivele contururi.

În final, se poate realiza, cu uşurinţă, că funcţia *f* (figura 3.3.(a)) are forma (sumă de produse) minimizată, unică:

$$f(u, v, w) = w' + v'.$$

Funcţia *g* (figura 3.3.(b)) are un contur cu patru unităţi care poate fi privit ca fiind reuniunea a două contururi cuprinzând câte două unităţi, respectiv:

$$(m_0 + m_2) + (m_1 + m_3) = (u'w') + (u'w) = u'.$$

Celelalte două contururi sunt, fiecare, cu câte două unităţi:

$$(m_0 + m_4) = v'w'$$

şi respectiv

$$(m_3 + m_7) = vw.$$

Privitor la calitatea acestor implicanţi de a fi primi, se poate realiza imediat că nu se pot trasa contururi care să includă contururile existente. Iar, în ceea ce priveşte completitudinea mulţimii implicanţilor primi, este limpede că nu sunt posibile alte contururi distincte de cele deja trasate.
Simplificarea funcţiei conduce la expresia algebrică (sumă de produse) minimizată, unică:

$$g(u, v, w) = u' + vw + v'w'.$$

Funcţia *h* este reprezentată printr-o diagramă Karnaugh în figura 3.3.(c).
Această funcţie corespunde funcţiei constante:

$$h(u, v, w) = 1.$$

Dacă ar fi să se judece doar după definiţia acesteia. În adevăr, această funcţiei este definită peste tot domeniul de definiţie prin valoarea 1.

Pe diagrama Karnaugh corespunzătoare (figura 3.3.(c)) s-a desenat un contur care se aşează peste toate cele opt unităţi ale acestei funcţii. Aceste contur poate fi privit ca fiind reuniunea a două contururi vecine, logic adiacente, fiecare cu câte patru unităţi.

Primul contur cu patru unităţi corespunde primei linii (w = 0) din diagrama Karnaugh (având asociată expresia logică w'). Iar cel de-al doilea contur corespunde celei de-a doua linii (w = 1) din diagrama Karnaugh (având asociată expresia logică w), aşa cum s-a remarcat anterior. Corespunzător, acestor expresii logice asociate celor două contururi cuprinzând fiecare câte patru unităţi, rezultă:

$$h(u, v, w) = w' + w = 1.$$

Funcţia *j* a cărei diagramă Karnaugh este prezentată în figura 3.3.(d), prezintă un caz particular: toţi mintermii funcţiei *j* sunt implicanţi primi esenţiali.

Mai exact, funcţia aceasta nu are termeni adiacenţi logic (nu există termeni vecini nici în diagramă). Se poate considera, in extremis, că fiecare minterm (respectiv fiecare unitate din diagrama Karnaugh) este adiacent doar cu sine (respectiv acoperit, în diagrama Karnaugh, printr-un contur care cuprinde doar o singură unitate).

Astfel, funcţia *j* are expresia (sumă de produse canonice) unică:

$$j(u, v, w) = u'v'w + u'vw' + uvw + uv'w'.$$

Funcţia $j(u, v, w)$ este, adesea, denumită funcţia *suma-modulo-2* ori, SAU-EX (sau-exclusiv) cu trei variabile.
□

Uneori este mai convenabilă minimizarea anumitor funcţii folosind valorile zero ale acestora comparativ cu minimizarea aceloraşi funcţii folosind valorile 1. Mai precis, de multe ori este mai simplă găsirea contururilor utilizând valorile 0, comparativ cu valorile 1, ale anumitor funcţii.

Minimizarea funcţiei, astfel calculată, este obţinută În final ca un produs de sume, reprezentând complementara respectivei funcţii.
Produsul de sume, este complementabil, eventual, prin aplicarea teoremei DeMorgan determinându-se o sumă de produse.

Acest procedeu este denumit *abordarea complementară*.

<u>*Exemplul 3.4.*</u>
Se consideră funcţia cu trei variabile:

$$g(a, b, c) = m_0 + m_4 + m_6 + m_7.$$

Această funcţie este reprezentată prin diagrama Karnaugh pentru trei variabile din figura 3.4.

Sunt trecute în diagrama din figura 3.4 atât valorile asertate cât şi valorile complementate ale funcţiei $g(a, b, c)$.

c \ ***a b***	**00**	**01**	**11**	**10**
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0

Figura 3.4.

Pentru funcţia $g'(a, b, c)$ sunt trei contururi generând mulţimea tuturor implicanţilor primi:

- coloana $a'b$, un contur cu două celule care generează implicantul prim $p_1 = a'b$.
- conturul cu două celule format la baza coloanelor $a'b'$ şi $a'b$, linia c, producând implicantul prim $p_2 = a'c$.
- conturul extins cu două celule, colţurile inferioare stânga şi dreapta ale diagramei, respectiv $a'b'c$ şi $ab'c$, reprezentând implicantul $p_3 = b'c$.

Tabelul incidenţei implicanţilor primi ai complementarei funcţiei este prezentat în tabelul 3.4:

Tabelul 3.4

	m_1	m_2	m_3	m_5	
p_1		*	*		*e*
p_2	*		*		
p_3	*			*	*e*

Implicanţii primi p_1 şi p_3 sunt esenţiali şi constituie o acoperire minimă a complementarei funcţiei:

$$g'(a, b, c) = a'b + b'c.$$

Iar funcţia va avea forma:

$$g(a, b, c) = (a'b + b'c)' = (a + b')(b + c').$$

Dacă asupra acestei forme se calculează produsele (desfacerea parantezelor) şi se efectuează complet toate calculele se obţine:

$$g(a, b, c) = ab + ac' + b'c'.$$

□

Exemplele următoare prezintă principalele tehnici de utilizarea a diagramelor Karnaugh pentru minimizarea funcţiilor logice cu patru variabile.
Corespunzător acestor funcţii diagramele Karnaugh pentru patru variabile joacă un rol important în metodele manuale de minimizare a funcţiilor cu cinci şi şase variabile.

Exemplul 3.5.

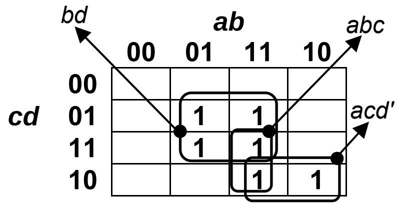


Figura 3.5.

Fie funcţia: $f(a, b, c, d) = m_5 + m_7 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$.

Acestei funcţii îi corespunde expresia în sume de produse calculate în raport cu variabilele *a, b, c* şi *d* :

$f(a, b, c, d) = a'bc'd + a'bcd + ab'cd' + abc'd + abcd' + abcd$.

În figura 3.5 se arată reprezentarea acestei funcţii printr-o diagramă Karnaugh, corespunzător variabilelor *a, b, c* şi *d*.

Ultima linie din diagramă are două celule adiacente (corespunzătoare mintermilor m_{10} + m_{14}). Prin celula corespunzătoare mintermului m_{10} este unicul şi cel mai larg contur care se poate trasa. Aceasta revine la a spune că implicantul $p_1 = acd' = m_{10} + m_{14}$, este prim şi esenţial.
Prin celula corespunzătoare mintermului m_{14} este posibilă trasarea conturului care include şi celula vecină a mintermului m_{15}.
Acest contur conduce la implicantul $p_2 = abc = m_{14} + m_{15}$. Implicantul p_2 este prim, deoarece conturul corespunzător este maximal.
Central în diagramă sunt dispuse patru celule, corespunzătoare mintermilor:

$$m_5 + m_{13} + m_7 + m_{15}.$$

Aceste patru celule se pot considera, într-o primă aproximare, ca fiind două contururi vecine, fiecare de câte două celule: $(m_5 + m_{13}) + (m_7 + m_{15}) = bc'd + bcd = bd$.

Se poate trage concluzia că un astfel de grup de patru celule învecinate sunt grupabile într-un contur care generează un implicant având două variabile reduse (acelea care n-au paritate constantă de-a lungul conturului, în cazul de faţă variabilele reduse sunt *a* şi *c*).

Implicantul generat, $p_3 = bd$, este prim deoarece nu există un alt contur care să includă acest contur. Implicantul prim $p_3 = bd$ este, de asemenea, şi esenţial deoarece acoperă în exclusivitate mintermii m_5, m_{13} şi m_7.

Tabelul 3.5

	m_5	m_7	m_{10}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	
$p_1 = acd'$			*		*		*e*
$p_2 = abc$					*	*	
$p_3 = bd$	*	*		*		*	*e*

Incidenţa dintre implicanţii primi şi mintermii, pentru această funcţie, este arătată în tabelul 3.5.

Extragerea implicanţilor primi esenţiali (împreună cu mintermii acoperiţi) face ca tabelul incidenţei implicanţilor primi să fie vid.
Rezultă că minimizarea exactă minimă este realizată prin acoperirea funcţiei doar cu implicanţii primi esenţiali p_1 şi p_3.
Aceasta conduce la expresia minimizată exactă a funcţiei:

$$f(a, b, c, d) = acd' + bd.$$

◊

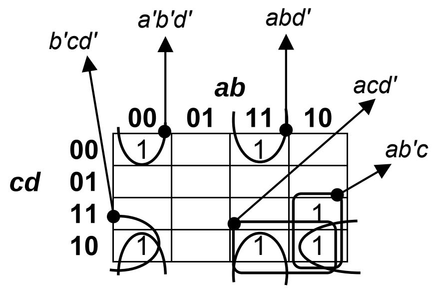


Figura 3.6.

Exemplul 3.6.

Se doreşte calculul tuturor formelor minimizate exact ale funcţiei:

$$f(a, b, c, d) = m_0 + m_2 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14},$$

Reprezentarea acestei funcţii printr-o diagramă Karnaugh este înfăţişată în figura 3.6.

Utilizând această reprezentare se determină, într-o primă etapă, mulţimea implicanţilor primi. În acest scop se stabilesc pentru fiecare din celulele funcţiei toate contururile maxime care sunt posibile faţă de respectiva celulă.

Astfel, pentru celula corespunzătoare mintermului m_0 (ab = 00 şi cd = 00, colţul din stânga sus în diagramă) este posibil *un singur* contur, extins, între această celulă şi celula corespunzătoare mintermului m_2 (ab = 00 şi cd = 10, colţul din stânga jos în diagramă). Implicantul corespunzător acestui contur va avea o variabilă mai puţin.
Aceasta este variabila c care schimbă paritatea în cadrul acestui contur. În adevăr:

$$p_1 = m_0 + m_2 = a'b'c'd' + a'b'cd' = a'b'd' (c' + c) = a'b'd'.$$

Implicantul p_1 este prim deoarece nu există un alt implicant care să-l conţină (adică, să aibă mai puţine variabile).

Celulei care reprezintă mintermul m_{12} (ab = 11 şi cd = 00, linia superioară din diagramă) i se poate ataşa un singur contur, extins, între această celulă şi celula reprezentând mintermul m_{14} (ab = 11 şi cd = 10, linia inferioară din diagramă).
Pentru acest contur, cu două celule, implicantul rezultat p_2 se determină prin stabilirea variabile care nu are paritate constantă. Aceasta este variabila c.
Se poate uşor verifica raţiunea acestei afirmaţii:

$$p_2 = m_{12} + m_{14} = abc'd' + abcd' = a'b'd' (c' + c) = abd'.$$

Pentru celula mintermului m_{10} ($ab'cd'$) este posibil să se traseze trei contururi distincte, maximale, pentru care se vor determina implicanţii primi p_3, p_4 şi p_5.

Implicantul p_3 este asociat conturului dintre celule mintermilor m_{10} şi m_{14}.
În cadrul acestui contur, cu două celule, va fi o singură variabilă care are schimbare de paritate. Aceasta este variabila b, celelalte variabile având paritate constantă.
Un calcul simplu poate să susţină această concluzie:

$$p_3 = m_{10} + m_{14} = ab'cd' + abcd' = acd' (b' + b) = acd'.$$

Implicantul p_3 este prim deoarece conturul respectiv este maximal, neexistând un altul care sa-l conţină.

Cel de-al doilea contur asociat celulei mintermului m_{10} este conturul care reuneşte această celulă şi celula mintermului m_{11}.
Implicantul p_4, generat de acest contur, va fi de forma *ab'c*, deoarece variabila *d* nu are pariate constantă în cadrul conturului considerat.

Ultimul contur asociat acestei celule reuneşte celula mintermului m_{10} cu celula mintermului m_2. În cadrul acestui contur implicantul prima care se va genera va avea variabila *a* redusă, deoarece aceasta schimba paritatea în acest contur.

Implicantul produs prin acest contur, p_5, este prim, fiind generat dintr-un contur maximal. Formula algebrică a implicantului prim p_5, este *b'cd'*.

Tabelul 3.6 prezintă incidenţa implicanţilor primi în raport cu mintermii funcţiei din acest exemplu.

Tabelul 3.6

	m_0	m_2	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{14}	
p_1	**∗**	∗					*e*
p_2					**∗**	∗	*e*
p_3			∗			∗	
p_4			∗	**∗**			*e*
p_5		∗	∗				

În tabelul 3.6, asteriscurile scrise îngroşat reprezintă, succint, cauza pentru care respectivul implicant prim este declarat esenţial.

Astfel, deoarece mintermul m_0 este acoperit doar de implicantul prim p_1, acest fapt conduce la declararea implicantului prim p_1 ca fiind esenţial.
Din acest motiv, unitatea aflată la intersecţia coloanei m_0 cu linia p_1 este scrisă îngroşat.
Consideraţii similare au condus la scrierea îngroşată a celorlalte unităţi din tabelul implicanţilor primi.
Toţi implicanţii primi, din tabelul implicanţilor, sunt esenţiali în afară de implicanţii primi p_3 şi p_5.

Implicanţii primi esenţiali vor face parte din orice acoperire minimă exactă a acestei funcţii.

Din tabelul implicanţilor se calculează clauzele formulei lui Petrick, astfel:
(a) mintermul m_0 este acoperit de implicantul prim esenţial p_1;
(b) mintermul m_2 este acoperit de implicanţii primi p_1 (esenţial) şi p_5;
(c) mintermul m_{10} este acoperit de implicanţii primi p_4 (esenţial), p_5 şi p_3;
(d) mintermul m_{11} este acoperit de implicantul prim esenţial p_4;
(e) mintermul m_{12} este acoperit de implicantul prim esenţial p_2;
(f) mintermul m_{14} este acoperit de implicantul prim esenţial p_2, dar şi de implicantul prim p_3.

Formula lui Petrick pentru această funcţie arată astfel:

$$p_1 \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4 + p_5) \cdot p_4 \cdot p_2 \cdot (p_2 + p_3) = 1.$$

Aplicând identitatea $a(a + b) = a$, formula lui Petrick se simplifică sesizabil, deoarece:

$$p_1 \cdot (p_1 + p_5) = p_1,$$
$$(p_3 + p_4 + p_5) \cdot p_4 = p_4 \text{ şi}$$
$$p_2 \cdot (p_2 + p_3) = p_2.$$

Formula lui Petrick, pentru această funcţie, ajunge să fie exprimată prin produsul celor trei implicanţi primi esenţiali:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 = 1.$$

În conformitate cu ultima expresie a formulei lui Petrick, rezultă că pentru funcţia considerată există o acoperire primă unică iredundantă, exactă şi minimă, exprimată prin reuniunea celor trei implicanţi primi esenţiali:

$$f(a, b, c, d) = a'b'd' + abd' + ab'c.$$

Privitor la simplificarea anterioară a formulei lui Petrick se cuvin făcute câteva consideraţii, utile, pe marginea tabelului implicanţilor.
Deîndată ce s-au declarat implicanţii primi, respectiv p_1, p_2 şi p_4, aceştia urmează să aparţină oricărei minimizări exacte, determinate prin acoperirea (mintermilor) funcţiei cu implicanţi primi, în conformitate cu teorema lui Quine.
Privitor la implicanţii primi, p_1, p_2 şi p_4, este clar că aceştia acoperă, în exclusivitate, respectiv mintermii m_0, m_{12}, şi m_{11}.
Dar, odată cu includerea (obligatorie) a implicanţilor primi esenţiali în orice soluţie de acoperire a funcţiei, sunt acoperiţi şi alţi mintermi decât acei care au determinat calificarea acestor implicanţi primi ca fiind esenţiali.
Astfel, se poate remarca faptul că prin includerea implicantului prim esenţial p_1, în soluţia minimizării exacte a funcţiei, odată cu mintermul m_0, este acoperit şi mintermul m_2.
Prin această remarcă se micşorează complexitatea problemei alegerii unui set de implicanţi primi (s-a redus numărul de mintermi care trebuie acoperiţi).
Tabelul implicanţilor primi a fost modificat (tabelul 3.6a) în intenţia marcării mintermilor acoperiţi de implicantul prim esenţial p_1.
Astfel, s-au barat cei doi mintermi acoperiţi de implicantul prim esenţial p_1.

Tabelul 3.6a
Influenţa implicantului prim esenţial p_1

	$\cancel{m}_0$	$\cancel{m}_2$	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{14}	
p_1	*	*					*e*
p_2					*	*	*e*
p_3			*			*	
p_4			*	*			*e*
p_5		*	*				

Analog, se poate observa că implicantul prim esenţial p_2, acoperă (în afară de mintermul m_{12}) şi mintermul m_{14}.
Tabelul implicanţilor a fost din nou modificat, aşa cum se poate vedea în tabelul 3.6b, prin bararea celor doi mintermi acoperiţi de implicantul prim esenţial p_2.

Tabelul 3.6b
Influenţa implicanţilor primi esenţiali p_1 şi p_2

	$\cancel{m}_0$	$\cancel{m}_2$	m_{10}	m_{11}	$\cancel{m}_{12}$	$\cancel{m}_{14}$	
p_1	*	*					*e*
p_2					*	*	*e*
p_3			*			*	
p_4			*	*			*e*
p_5		*	*				

Similar, implicantul prim esenţial p_4, acoperă (în afară de mintermul m_{11}) şi mintermul m_{10}.
Tabelul implicanţilor a fost, încă odată, modificat prin bararea celor doi mintermi acoperiţi de implicantul prim esenţial p_4, cum se poate vedea în tabelul 3.6c.

Tabelul 3.6c
Influenţa celor trei implicanţi primi esenţiali

	$\cancel{m}_0$	$\cancel{m}_2$	$\cancel{m}_{10}$	$\cancel{m}_{11}$	$\cancel{m}_{12}$	$\cancel{m}_{14}$	
p_1	*	*					*e*
p_2					*	*	*e*
p_3			*			*	
p_4			*	*			*e*
p_5		*	*				

Acum, este evident că implicanţii primi esenţiali ai acestei funcţii sunt, şi prin aceste considerente, soluţia unică a minimizării exacte a funcţiei:

$$f(a, b, c, d) = m_0 + m_2 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{14}.$$

◊

În figura 3.7 sunt prezentate alte contururi posibile, care grupează câte patru celule într-o diagramă Karnaugh, pentru funcţii cu patru variabile. Pentru fiecare funcţie reprezentată în figura 3.7 este menţionată formula minimizată corespunzătoare conturului respectiv.

Figurile 3.7 (a) şi (b) înfăţişează contururi cu câte patru unităţi grupate în contururi ce formează *careuri*.

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11			1	1
10			1	1

f(a, b, c, d) = ac

Figura 3.7 (a).

cd \ ab	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11				
10				

g(a, b, c, d) =bc'

Figura 3.7 (b).

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10				

h(a, b, c, d) = cd

Figura 3.7 (c).

cd \ ab	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11			1	
10			1	

j(a, b, c, d) = ab

Figura 3.7 (d).

cd \ ab	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11				
10		1	1	

k(a, b, c, d) = bd'

Figura 3.7 (e).

cd \ ab	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11				
10				

m(a, b, c, d) = b'c'

Figura 3.7 (f).

cd \ ab	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

n(a, b, c, d) = b'd' + bd

Figura 3.7 (g).

În figura 3.8 sunt înfăţişate contururi care includ opt celule, în diagramele Karnaugh pentru funcţii cu patru variabile.

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

m(a, b, c, d) = c

Figura 3.8 (a).

cd \ ab	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11			1	1
10			1	1

n(a, b, c, d) = a

Figura 3.8 (b).

cd \ ab	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1			1
10	1			1

p(a, b, c, d) = b'

Figura 3.8 (c).

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

q(a, b, c, d) =d'

Figura 3.8 (d).

Sunt, de multe ori, situaţii în care complementara unei funcţii poate oferi, ocazional, soluţii mai bune.
Exemplul care urmează prezintă un astfel de caz.

<u>Exemplul 3.7.</u>
Se consideră funcţia cu patru variabile:
$h(a, b, c, d) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10}$.
În figura 3.9. (a), este prezentată diagrama Karnaugh a funcţiei *h*(*a, b, c, d*), iar în figura 3.9.(b), este prezentată diagrama Karnaugh a complementarei acesteia, *h'*(*a, b, c, d*).

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11				
10	1	1		1

b'd'
b'c'
a'c'
a'd'

Figura 3.9.(a)

cd \ ab	00	01	11	10
00			0	
01			0	
11	0	0	0	0
10			0	

ab
cd

Figura 3.9.(b)

Pentru funcţia $h(a, b, c, d)$, din figura 3.9.(a) se determină patru implicanţi primi constituind mulţimea tuturor implicanţilor primi ai acestei funcţii. Aceşti patru implicanţi sunt generaţi astfel:

(1) conturul cu patru celule delimitat între coloanele ab = 00 şi ab = 01 şi liniile cd = 00 şi cd = 01, va genera implicantul prim $p_1 = a'c'$;
(2) conturul, în extensie, cu patru unităţi delimitat între aceleaşi coloane ca şi precedentul contur, dar cuprinzând liniile cd = 00 şi cd = 10, va genera implicantul prim $p_2 = a'd'$;
(3) conturul, în extensie, cu patru unităţi cuprinzând coloanele ab = 00 şi ab = 10 şi liniile cd = 00 şi cd = 01, va genera implicantul prim $p_3 = b'c'$;
(4) conturul, în extensie, cu patru unităţi cuprinzând cele patru celule din colţurile diagramei ($abcd$ = 0000, 1000,1010 şi 0010), va genera implicantul prim $p_4 = b'd'$.

Se poate dovedi uşor că toţi implicanţii primi sunt esenţiali.
Minimizarea exactă a funcţiei $h(a, b, c, d)$ arată astfel:

$$h(a, b, c, d) = a'c' + a'd' + b'c' + b'd'.$$

Utilizând diagrama Karnaugh a complementarei funcţiei (figura 3.9.(b)) se obţine expresia:

$$h'(a, b, c, d) = ab + cd.$$

Această expresie (pentru $h'(a, b, c, d)$) are doar doi termeni produs, în timp ce expresia minimizată a funcţiei $h(a, b, c, d)$ are patru termeni produs.

Este evident că minimizarea funcţiei complementare are jumătate din numărul termenilor produs corespunzători minimizării funcţiei considerate şi introduce doar o inversare a ieşirii porţii finale (sunt disponibile curent porţi SAU-NU fără costuri suplimentare).

Complementând expresia funcţiei $h'(a, b, c, d)$ rezultă următoarea formă a funcţiei h:

$$h(a, b, c, d) = (a' + b')(c' + d').$$

Efectuând calculele se regăseşte prima expresie determinată, anterior, pentru funcţia $h(a, b, c, d)$.

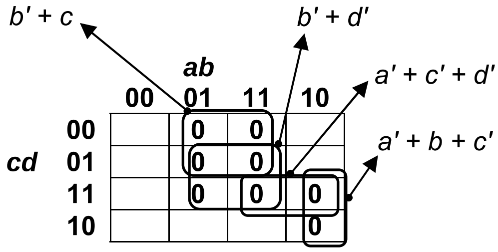
□

4. Minimizarea funcţiilor scalare specificate prin produse de sume

Anumite implementări ale funcţiilor logice impun exprimarea acestora prin produse de sume (termenul în engleză este *product of sums* cu abrevierea POS).
Atunci când sunt utilizate diagramele Karnaugh pentru minimizarea acestor expresii se poate obţine o minimizarea a produselor de sume prin utilizarea valorilor zero ale funcţiei respective.

Exemplul 4.1.
Se consideră funcţia reprezentată prin diagrama Karnaugh din figura 4.1.(a).
Funcţia este specificată prin valorile 0.
Procedeul de minimizare în cazul produselor de sume este similar celui în care sunt utilizate sumele de produse, cu câteva excepţii care vizează în special modul de citire al sumelor minimizate, în acest caz. Astfel, pentru determinarea sumelor corespunzătoare contururilor (trasate peste celule conţinând zerouri) o variabilă este complementată dacă

valoarea sa de-a lungul conturului este constant unu. Altfel, dacă valoarea sa este asertată dacă peste conturul considerat este constant zero.



g(*a, b, c, d*)

Figura 4.1.(a)

Se poate remarca, din figura 4.1.(a), că sunt posibile în total patru contururi ataşate celor opt celule, conţinând zerourile corespunzătoare expresiei funcţiei. Corespunzător fiecărui contur sunt ataşate, în figura 4.1.(a), expresiile logice în sume, minimizate. Expresiile logice ataşate fiecărui contur sunt calculate în maniera specificată anterior.
Într-o primă formă funcţia $g(a, b, c, d)$ este exprimată prin produse de sume şi arată astfel:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d')(a' + c' + d')(a' + b + c')$$

Conturul corespunzător sumei (implicatului) $a' + c' + d'$, nu este esenţial, se poate realiza fără dificultate. Astfel, se poate remarca faptul că implicatul neesenţial este conţinut în produsul celorlalţi implicaţi.
Toate celelalte contururi produc implicaţi esenţiali.
În final formula minimizată exact printr-un produs de sume arată astfel:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d')(a' + b + c').$$

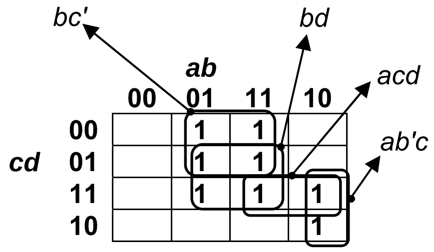
□

O posibilă metodă alternativă poate fi formulată astfel:

(1) În reprezentarea funcţiei complementate, celule vor fi iniţializate prin valori unu;
(2) Se calculează minimizarea cunoscută, utilizând diagramele Karnaugh, rezultatul fiind exprimat printr-o sumă de produse;
(3) Se complementează expresia rezultată prin legea DeMorgan, obţinând produse de sume.

Se poate demonstra, în fapt, că procedeul prezentat anterior este echivalent acestei metode, alternative. Această metodă, alternativă, este prezentată în exemplul următor.
Pentru o mai bună înţelegere şi o facilă comparaţie s-a utilizat aceeaşi funcţie ca şi în exemplul 4.1.

<u>Exemplul 4.2.</u>
Se consideră funcţia reprezentată prin diagrama Karnaugh din figura 4.2.



g'(*a, b, c, d*)

Figura 4.2.

Sunt patru contururi în figura 4.2, din care unul nu este esenţial, cel corespunzător implicantului *acd*.
Acest implicant este conţinut în reuniunea altor doi implicanţi primi:

$$acd \subset bd + ab'c.$$

Pentru că, $acd = m_{15} + m_{11}$, iar $bd + ab'c = (m_{15} + m_{13} + m_7 + m_5) + (m_{11} + m_{10})$.

Forma minimizată exact în sume de produse a funcţiei $g'(a, b, c, d)$, arată astfel:

$$g'(a, b, c, d) = bc' + bd + ab'c.$$

Aplicând legea DeMorgan rezultă următoarea formă minimizată în sume de produse pentru funcţia considerată:

$$g(a, b, c, d) = (b' + c)(b' + d')(a' + b + c').$$

□

5. Minimizarea funcţiilor scalare având mai mult de 4 variabile

Numărul de variabile reprezentabile prin sistemele de diagrame Karnaugh poate fi într-o oarecare măsură mărit, nefiind limitat strict la cel mult patru variabile. Există posibilitatea alcătuirii unor diagrame pentru funcţii având mai mult de 4 variabile dar sesizarea grupărilor celor mai eficiente poate fi ceva mai delicată şi poate compromite eficienţa utilizării acestor diagrame Karnaugh de rang superior. Realizarea grupărilor celor mai potrivite în diagramele cu mai mult de patru variabile necesită, în general, o experienţă peste medie.
Există numeroase abordări ale acestei probleme în literatura de specialitate. Idea care a fost mult utilizată şi încercată practic s-a focalizat pe utilizarea unor diagrame Karnaugh, bine cunoscute şi uşor de reţinut, care să fie, la rândul lor, în aşa fel grupate încât să sugereze modalităţi cât mai simple de minimizare. În exemplele care urmează sunt considerate funcţii cu mai mult decât patru variabile pentru ilustrarea metodei.

Exemplul 5.1.
Se consideră funcţia cu cinci argumente: $u(a, b, c, d, e) = m_2 + m_5 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{13} + m_{15} + m_{17} + m_{19} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{29} + m_{31}$.
Diagrama completă, pentru cinci variabile (aşa cum este prezentată în figura 5.1) se poate descompune în două diagrame de patru variabile fiecare. Prima din cele două diagrame Karnaugh de patru variabile corespunde valorilor 0 ale variabilei *a* (figura 5.1.(a)) iar cealaltă pentru valorile 1 ale aceleiaşi variabile (figura 5.1.(b)).

de* \ *abc	000	001	011	010	110	111	101	100
00				1	1			
01		1	1			1	1	1
11		1	1			1	1	1
10	1			1				

$u(a, b, c, d, e) = m_2 + m_5 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{13} + m_{15} + m_{17} + m_{19} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{29} + m_{31}$.

Figura 5.1. Diagrama Karnaugh cu cinci variabile pentru funcţia exemplului 5.1.

Prezenţa unor grupări simetrice, în cele două diagrame Karnaugh cu patru variabile, conduce la concluzia că respectivele grupări, fiind reprezentabile prin aceleaşi expresii doar în variabilele *c*, *b, d,* şi *e*, oferă factorizarea respectivelor expresii şi reducerea, implicită a variabilei *a*.

de \ ***bc***	00	01	11	10
00				**1**
01		**1**	**1**	
11		**1**	**1**	
10	**1**			**1**

(***a*** = 0)
Figura 5.1.(a).

de \ ***bc***	00	01	11	10
00				**1**
01	**1**	**1**	**1**	
11	**1**	**1**	**1**	
10				

(***a*** = 1)
Figura 5.1.(b).

În continuare este prezentată şi transcrierea algebrică a grupărilor din cele două diagrame, precum şi grupările dintre diagrame:

$u(a, b, c, d, e) = a'(c'de') + (a' + a)ce + (a' + a)\, bc'd'e' + ab'e =$
$= a'c'de' + ce + bc'd'e' + ab'e.$

de \ ***bc***	00	01	11	10
00				***a + a'***
01	***a***	***a + a'***	***a + a'***	
11	***a***	***a + a'***	***a + a'***	
10	***a'***			***a'***

Figura 5.1.(c). Diagrama Karnaugh corespunzătoare funcţiei *u* din exemplul 4 conţinând expresii în variabila *a*.

O altă abordare a acestei metode este substituirea unităţilor din diagramele Karnaugh prin expresii algebrice alcătuite cu variabilele care etichetează diagramele (în cazul de faţă este o singură variabilă şi anume variabila *a*). Aşa cum se poate remarca din figura 5.1.(c) grupările omoloage din figurile 5.1.(a) şi 5.1.(b) au condus la expresiile *a + a'*, care se reduc (*a + a'* = 1).

Pe de altă parte, grupările care n-au avut corespondenţi între cele două diagrame Karnaugh din figurile 4b şi 4c, au păstrat expresii în *a* (*a* şi respectiv *a*') aşa cum se poate vedea din diagrama Karnaugh prezentată în figura 5.1.(c).

Expresia, simplificată, a funcţiei *u*(*a, b, c, d, e*) prin utilizarea diagramei Karnaugh cu expresii în variabila *a*, este prezentată în figura 5.1.(d).

de \ ***bc***	00	01	11	10
00				**1**
01	***a***	**1**	**1**	
11	***a***	**1**	**1**	
10	***a'***			***a'***

$u(a, b, c, d, e) = bc'd'e' + ce + ab'e + a'c'de'$

Figura 5.1.(d). Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcţiei *u* din exemplul 4 conţinând expresii simplificate în variabila *a*.

Metoda utilizării expresiilor algebrice, în locul unităţilor, în diagramele Karnaugh se poate face pornind direct de la forma algebrică în sumă de termeni canonici prin factorizarea cuburilor care nu conţin variabilele de etichetare. Pentru uşurinţa calculelor se poate observa că variabila *a* va apare doar în mintermii având indicele mai mare sau egal cu 16, în timp ce variabila *a'* va apare în mintermii cu indicele strict mai mic sau egal cu 15. Astfel, funcţia *u*(*a, b, c, d, e*) se poate scrie astfel:

u(*a, b, c, d, e*) = (*b'cd'e* + *bcd'e* + *b'cde* + *bcde* + *bc'd'e'*)(*a* + *a'*) + (*b'c'de'* + *bc'de'*)*a'* + (*b'c'd'e* + *b'cd'e* + *b'c'de* + *b'cde*)*a*.

Alcătuirea unei diagrame Karnaugh utilizând variabilele *b, c, d,* şi *e* cu expresii în variabila *a* va arăta ca în figura 5.1.(d). Implicanţii primi astfel obţinuţi sunt esenţiali.

□

Exemplul care urmează abordează o funcţie cu şase variabile schiţând o metoda mai generală de tratare a funcţiilor cu şase variabile utilizând un cadran cu patru diagrame Karnaugh, fiecare cu câte patru variabile. Metoda vizează utilizarea şabloanelor diagramelor Karnaugh cu patru variabile pentru funcţii cu şase variabile.

Ca şi în cazul exemplului precedent se utilizează introducerea unor expresii algebrice în locul unităţilor, procedeul uzat în mod curent.
În maniera acesta se deschide o abordare care poate permite, în continuare, extinderea diagramelor Karnaugh pentru funcţii cu un număr mai mare de variabile decât se utilizează tradiţional.

***Exemplul* 5.2.**

Se consideră funcţia cu şase variabile:

$v(a, b, c, d, e, f) = m_2 + m_8 + m_{10} + m_{18} + m_{24} + m_{26} + m_{34} + m_{37} + m_{42} + m_{45} + m_{50} + m_{53} + m_{58} + m_{61}$.

Diagrama Karnaugh cu şase variabile a acestei funcţii este prezentată în figura 5.2.(a).

O reprezentare a acestei funcţii, divizată în patru diagrame Karnaugh cu patru variabile fiecare, este prezentată în figura 5.2.(b).

bef \ acd	000	001	011	010	110	111	101	100
000				1				
001						1	1	
011								
010	1			1	1			1
110	1			1	1			1
111								
101						1	1	
100				1				

Figura 5.2.(a). Diagrama Karnaugh pentru funcţia $v(a, b, c, d, e, f) = m_2 + m_8 + m_{10} + m_{18} + m_{24} + m_{26} + m_{34} + m_{37} + m_{42} + m_{45} + m_{50} + m_{53} + m_{58} + m_{61}$.

Grupările pentru această funcţie, în figura 5.2.(b), au fost desenate astfel încăt prin grosimea şi forma liniei unei grupări sunt sugerate modul în care acestea sunt conectate.

(*ab* = 00)

ef \ *cd*	00	01	11	10
00				**1**
01				
11				
10	**1**			**1**

(*ab* = 10)

ef \ *cd*	00	01	11	10
00				
01		**1**	**1**	
11				
10	**1**			**1**

(*ab* = 01)

ef \ *cd*	00	01	11	10
00				**1**
01				
11				
10	**1**			**1**

(*ab* = 11)

ef \ *cd*	00	01	11	10
00				
01		**1**	**1**	
11				
10	**1**			**1**

Figura 5.2.(b). Minimizarea funcţiei $v(a, b, c, d, e, f)$ din exemplul 5.2 prin divizarea acesteia în patru diagrame Karnaugh cu câte patru variabile fiecare.

Astfel, cu linie punctată marunt sunt marcate două grupări similare din diagramele corespunzătoare (*ab* = 00) şi (*ab* = 01), $a'cd'f'(b' + b) = a'cd'f'$.
Tot cu linie punctată, dar ceva mai mai mare, sunt desemnate două grupări din diagramele (*ab* = 10) şi respectiv (*ab* = 11), $ade'f(b' + b) = ade'f$.

Cu linie plină îngroşată este marcat un grup de 8 unităţi, câte două din fiecare diagramă şi situate la baza diagramelor respective $d'ef'(a'b' + ab' + a'b + ab) = d'ef'$. Rezultă că forma minimizată a acestei funcţii este:

$$v(a, b, c, d, e, f) = a'cd'f' + ade'f + d'ef'.$$

Aplicând substituirea unităţilor din diagramele Karnaugh din figura 5.2.(b) prin expresii construite cu etichetele diagramelor respective se obţine diagrama Karnaugh din figura 5.2.(c).

ef \ *cd*	00	01	11	10
00				***a'***
01		***a***	***a***	
11				
10	**1**			**1**

$$v(a, b, c, d, e, f) = a'cd'f' + ade'f + d'ef'.$$

Figura 5.2.(c). Diagrama Karnaugh corespunzătoare mintermilor funcţiei *v* din exemplul 5.2 conţinând expresii simplificate în variabilele *a* şi *b*.

Se poate remarca, în final, faptul că:

- grupul celor două unităţi din diagramele etichetate *ab* = 10 şi *ab* = 11 (*c'de'f* şi *cde'f* în figura 5b), apar în figura 5c prin variabila *a*,
- grupul celor opt unităţi sunt reprezentate în diagrama din figura 5c prin constanta 1 (cele două variabile ale etichetelor s-au redus), iar
- cele două unităţi (*cd'e'f'*) din diagramele etichetate prin *ab* = 00 şi *ab* = 01 (figura 5b) sunt reprezentate prin expresia *a'* în diagrama Karnaugh din figura 5c;
- Implicanţii primi, astfel obţinuţi, sunt esenţiali.

◊

6. Minimizarea funcţiilor scalare care conţin termeni nespecificaţi

În practica proiectării logice pot apare situaţii când, pentru anumite combinaţii ale variabilelor unei funcţii, valorile funcţiei să nu fie definite. Acest fapt poate avea loc dacă, spre exemplu, respectivele combinaţii ale variabilelor nu prezintă interes pentru că nu au cum să apară în contextul pentru care se face proiectarea, ori pur şi simplu respectivele combinaţii ale liniilor de intrare nu au cum să apară.
Se presupune că se proiectează un dispozitiv digital care urmează să afişeze durate de timp măsurate, spre exemplu, în secunde. Atunci, valori ale rangului zecilor de secunde, mai mari decât cinci nu sunt posibile.

Modul de abordare al minimizării funcţiilor logice care cuprind termeni neprecizaţi este ilustrat printr-un prim exemplu practic.

***Exemplul* 6.1.**

Se consideră funcţia *h*(*a,b,c,d*) = ***m*** $\sum$(1, 5, 7, 8, 10, 14) + ***x*** $\sum$(0, 6, 9, 11, 13, 15).
Diagrama Karnaugh pentru funcţia *h*(*a,b,c,d*) este ilustrată în figura 6.1.

		ab			
		00	01	11	10
	00	X			1
cd	01	1	1	X	X
	11		1	X	X
	10		X	1	1

Figura 6.1.(a) Diagrama Karnaugh şi implicanţii primi corespunzători mintermilor funcţiei *h*(*a, b, c, d*) din exemplul 6.1.

Termenii neprecizaţi, simbolizaţi prin *X* reprezintă acele combinaţii ale variabilelor funcţiei *h*(*a, b, c, d*) pentru care această funcţie nu are valoarea precizată.

Pe parcursul procesului de minimizare anumite valori *X* pot fi definite, precizate, după cum impune soluţia de minimizare aleasă.

Astfel, pentru constituirea unor contururi mai largi se pot include în respectivele contururi simboluri *X* alături de valori 1.

Corespunzător, acelor combinaţii ale liniilor de intrare li se vor atribui valori 1.
Simbolurilor *X* care nu sunt cuprinse, alături de valori 1, în contururile de minimizare ale funcţiei, li se va atribui valoarea 0.

În acest mod, după încheierea procesului de minimizare, toate simbolurile *X* vor fi 1 ori 0.

Contururile asociate diagramei Karnaugh corespunzătoare figurii 6.1.(a) sunt prezentate în figura 6.1.(b).

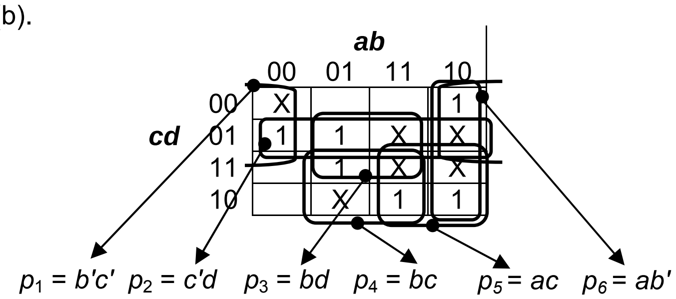


Figura 6.1.(a). Diagrama Karnaugh şi implicanţii primi corespunzători mintermilor funcţiei $h(a, b, c, d)$ din exemplul 6.1.

Mulţimea implicanţilor primi ai funcţiei $h(a, b, c, d)$ este:

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$,

respectiv:

$P = \{b'c', c'd , bd, bc , ac , ab'\}$.

Matricea de incidenţă a implicanţilor primi în raport cu termenii canonici, pentru această funcţie, este prezentată ca în tabelul 6.1.(a).

Tabelul 6.1.(a).

	$m_1 =$ $a'b'c'd$	$m_5 =$ $a'bc'd$	$m_7 =$ $a'bcd$	$m_8 =$ $ab'c'd'$	$m_{10} =$ $ab'cd'$	$m_{14} =$ $abcd'$
$p_1 = b'c'$ (1,8)	*			*		
$p_2 = c'd$ (1,5)	*	*				
$p_3 = bd$ (5,7)		*	*			
$p_4 = bc$ (7,14)			*			*
$p_5 = ac$ (10,14)					*	*
$p_6 = ab'$ (8,10)				*	*	

Se remarcă, în matricea de incidenţă, prezenţa exclusiv a mintermilor corespunzători valorilor precizate, în timp ce termenii corespunzători valorilor neprecizate nu sunt utilizaţi.
De asemenea se poate observa, în acest exemplu, absenţa termenilor esenţiali.
Matricea de incidenţă prezintă ceea ce se numeşte, tradiţional, un nucleu ciclic.

Produsul lui Petrik pentru matricea de incidenţă prezentată în tabelul 6.1.(a) este calculat astfel:
$F = s_1\, s_5\, s_7\, s_8\, s_{10}\, s_{14}$, unde clauzele de acoperire sunt calculate astfel:

$s_1 = (p_1+ p_2)$, $s_5 = (p_2+ p_4)$, $s_7 = (p_4+ p_5)$, $s_8 = (p_1+ p_3)$, $s_{10} = (p_3+ p_6)$ şi $s_{14} = (p_5+ p_6)$;

Efectuând produsele în expresia $F = s_1\, s_5\, s_7\, s_8\, s_{10}\, s_{14}$, se obţine formula:

$$F = p_2 p_3 p_5 + p_1 p_4 p_6 + p_1 p_2 p_5 p_6 + p_2 p_3 p_4 p_6 + p_1 p_2 p_4 p_6 + p_1 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_4 p_5 p_6 + p_1 p_3 p_4 p_6 .$$

Din suma de produse anterioară se poate remarca faptul că funcţia acceptă două forme minime respectiv $\{p_2, p_3, p_5\}$ şi $\{p_1, p_4, p_6\}$, amândouă cu cardinalitatea trei, precum şi alte şase forme minimale (cu cardinalitatea patru).

◊

Exemplul care urmează introduce o funcţie cu termeni neprecizaţi pentru care matricea incidenţei implicanţilor primi este reductibilă.

Exemplul 6.2

Se consideră funcţia $g(a,b,c,d) = \boldsymbol{m} \sum(0, 1, 3, 5, 13, 15) + \boldsymbol{X} \sum(2, 6, 10, 11, 12)$.
Mulţimea implicanţilor primi ai funcţiei $g(a, b, c, d)$ a fost determinată astfel:
$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$, iar matricea de incidenţă a implicanţilor primi cu termenii canonici, pentru această funcţie arată ca în tabelul 6.2.

Tabelul 6.2

Implicanţii primi	Termenii canonici m_0	m_1	m_3	m_5	m_{13}	m_{15}	Obs
(0-01) p_1		*		*			
(-101) p_2				*	*		
(110-) p_3					*		
(1-11) p_4						*	
(11-1) p_5					*	*	
(00- -) p_6	*	*	*				*e*
(-01-) p_7			*				

Matricea de incidenţă prezintă un singur implicant prim esenţial, p_6. Acesta va face parte din orice soluţie minimă a funcţiei g

Se observă faptul că implicantul prim p_4 acoperă doar m_{15} în timp ce implicantul prim p_5 acoperă atât mintermul m_{15} cât şi mintermul m_{13}.
Este un caz de dominanţă între liniile unei matrice de incidenţă. Linia dominată este exclusă din procesul de alegere, cu atât mai mult cu cât numărul de literali al implicantului prim p_4 nu este mai mic decât cel al implicantului prim p_5.

De notat că, în urma îndepărtării implicantului prim esenţial şi a mintermilor acoperiţi de acesta, implicantul prim p_1 ajunge să fie dominat de implicantul prim p_2 .
Se poate remarca, din nou, că ambii implicanţi primi au acelaşi număr de literali.
Linia dominată este eliminată, împreună cu implicantul prim asociat, din procesul de alegere a soluţiei minime.

După aceste două dominanţe de linii matricea de incidenţă arată ca în tabelul 6.2(a).

Tabelul 6.2(a)

Implicanţii primi	Mintermii m_5	m_{13}	m_{15}	Obs.
(-101) p_2	*	*		*e*
(11-1) p_5		*	*	*e*

Ambii implicanţi primi sunt esenţiali (secundari) şi sunt adăugaţi soluţiei minime.

În concluzie, forma minimă a funcţiei:

$$g(a,b,c,d) = m \sum(0, 1, 3, 5, 13, 15) + d \sum(2, 6, 10, 11, 12),$$

arată astfel:

$$g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + abd.$$

Această formă nu este, însă, unica formă minimă.

Astfel, dacă se va considera matricea de incidenţă (tabelul 6.2.(c)) aşa cum rămâne aceasta după extragerea implicantului prim esenţial p_6 se poate calcula un produs al lui Petrik corespunzător acestei matrice, ţinând seama şi de implicantul prim esenţial p_6.

Tabelul 6.2(c)

Implicanţii primi	Mintermii m_5	m_{13}	m_{15}	Obs.
(0-01) p_1	*			
(-101) p_2	*	*		
(110-) p_3		*		
(1-11) p_4			*	
(11-1) p_5		*	*	

$F = p_6(p_1+ p_2)\,(p_2+ p_3 + p_5)\,(p_4+ p_5) = p_1\,p_3\,p_4\,p_6 + p_1\,p_5\,p_6 + p_2\,p_4\,p_6 + p_2\,p_5\,p_6$.

Soluţiile date de acest produs demonstrează că sunt în total trei soluţii minime de acoperire a acestei funcţii:

$$p_1\,p_5\,p_6 + p_2\,p_4\,p_6 + p_2\,p_5\,p_6,$$

una dintre acestea fiind şi cea calculată mai înainte.

Sunt listate în continuare toate soluţiile minime (cardinalitate 3) de acoperire ale funcţiei $g(a,b,c,d)$:

1) $g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + abd$,
2) $g(a,b,c,d) = a'b' + bc'd + acd$,
3) $g(a,b,c,d) = a'b' + a'c'd + abd$.

Produsul lui Petrick oferă, teoretic, întotdeauna ansamblul tuturor soluţiilor de acoperire a unei funcţii scalare Booleene în raport cu mulţimea implicanţilor primi ai acesteia.
Funcţiile cu complexitate ridicată pot ridica dificultăţi chiar şi pentru obţinerea mulţimii implicanţilor primi (pot fi foarte numeroşi si, din acest motiv, dificil de determinat în totalitate).

Produsul lui Petrick poate fi foarte dificil de calculat pentru cazuri complicate (funcţii cu un număr important de implicanţi primi) şi atunci procedeul de micşorare al matricei de incidenţă prin dominanţa liniilor şi - sau coloanelor precum şi prin implicanţii primi esenţiali secundari, terţiari etc., poate să ofere, într-un timp acceptabil, o soluţie minimă ori chiar *minimală* dacă nu sunt alte posibilităţi de calcul în timp rezonabil.
◊