Seminar 5
Analiza stabilității sistemelor liniare

Noțiuni teoretice

Criteriul Hurwitz de analiză a stabilității sistemelor liniare

În cazul sistemelor liniare, stabilitatea este o condiție de localizare a valorilor proprii ale matricii A (stabilitate internă) sau a polilor matricei de transfer T (stabilitate externă).

Punctul de plecare îl reprezintă polinomul caracteristic al sistemului. Se consideră polinomul caracteristic $\chi(\mathrm{s}) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0$, $a_n > 0$

Cu ajutorul coeficienților se contruiește un determinant de ordinul *n*. Construcția începe de la diagonala principală, apoi se construiesc coloanele. Determinantul se numește determinant Hurwitz sau tablou Hurwitz și se notează cu H_n. El va delimita în continuare minorii Hurwitz (numiți și minori principali).

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Minorii Hurwitz extrași din determinant:

$$H_1 = |a_{n-1}|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

Criteriul lui Hurwitz:

Polinomul caracteristic $\chi(\mathrm{s})$ are toate rădăcinile cu parte reală negativă (deci situate în $\boldsymbol{C}_{-}$) dacă și numai dacă toți minorii Hurwitz (ca determinanți) sunt strict pozitivi.

- Un SL N este *strict stabil intern (asimptotic stabil)* dacă și numai dacă toți minorii Hurwitz din tabloul contruit pentru polinomul caracteristic al matricei A
  $$\chi(\mathrm{s}) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 \text{ , } a_n > 0$$
  sunt strict pozitivi.
- Un SL N este *strict stabil extern (stabil în sens BIBO)* dacă și numai dacă toți minorii Hurwitz din tabloul construit pentru polinomul
  $$\mathrm{p(s)} = b_q \cdot s^q + b_{q-1} \cdot s^{q-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0 \text{ , } b_q > 0$$
  din forma ireductibilă a matricei de transfer T(s) sunt strict pozitivi.

Alte criterii de stabilitate – Criteriul Routh-Hurwitz

- *Stabilitatea internă a unui SL D*
  Fie polinomul caracteristic dat de ecuația
  $$\chi(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot z + a_0$$
  și fie transformarea omografică *w* dată de ecuația
  $$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$
  Se deduce astfel un polinom în variabilă *w* care este de forma:
  $$\chi(w) = a_n(1 + w)^n + a_{n-1}(1 + w)^{n-1}(1 - w) + \cdots + a_1(1 + w)(1 - w)^{n-1} + a_0 \cdot (1 - w)^n = c_n w^n + c_{n-1} w^{n-1} + \cdots + c_1 w + c_0$$
  Dacă minorii Hurwitz construiți cu coeficienții c_i sunt toți strict pozitivi, atunci și numai atunci sistemul este *asimptotic stabil (intern).*

- *Stabilitatea externă a unui SL D*
  Fie polinomul *p(z)* din forma ireductibilă a lui *T(z)= R(z)/p(z)* de forma
  $$p(z) = b_q \cdot z^q + b_{q-1} \cdot z^{q-1} + \cdots + b_1 \cdot z + b_0$$
  și fie transformarea omografică *w* dată de ecuația
  $$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$
  Se deduce astfel un polinom în variabilă *w* care este de forma:
  $$p(w) = b_q(1 + w)^q + b_{q-1}(1 + w)^{q-1}(1 - w) + \cdots + b_1(1 + w)(1 - w)^{q-1} + b_0 \cdot (1 - w)^q = d_q w^q + d_{q-1} w^{q-1} + \cdots + d_1 w + d_0$$
  Dacă minorii Hurwitz construiți cu coeficienții d_i sunt toți strict pozitivi, atunci și numai atunci sistemul este *stabil extern.*

Problema 1

Fie SL N având realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12 & 2 & -13 & 1 & -13 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -8 & 8 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se analizeze stabilitatea internă și externă, utilizând criteriul lui Hurwitz.

Rezolvare

Stabilitate internă

Pentru a determina stabilitatea internă a sistemului dat, se determină polinomul caracteristic.

$$\chi(s) = \det(sI - A) = a_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + \cdots + s^n \cdot a_n\ , \quad a_n > 0$$

Se observă că realizarea este una standard controlabilă.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, C = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-1}]$$

- Matricea $A \in R^{n\times n}$ are toate elementele zero mai puțin cele de pe supradiagonala principală care sunt 1. Elementele de pe ultima linie sunt egale cu coeficienții numitorului $H(\lambda)$ cu semn schimbat luați în ordinea crescătoare a puterilor lui λ.
- Vectorul coloană $B \in R^{n\times 1}$ are toate elementele 0 mai puțin ultimul care este 1.
- Vectorul linie $C \in R^{1\times n}$ are toate elementele egale cu coeficienții numărătorului $H(\lambda)$, luați în ordinea crescătoare a puterilor lui λ.

Se poate scrie direct polinomul caracteristic:

$$\chi(s) = 12 - 2s + 13s^2 - s^3 + 13s^4 - s^5 + s^6 + s^7$$

Tabloul lui Hurwitz pentru polinomul caracteristic de grad 7:

$$H = \begin{bmatrix} a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Pentru exemplul nostru avem:

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 13 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 13 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = |a_{n-1}| = 1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 13 < 0$$

Unul dintre minorii principali este negativ → sistemul este instabil intern.

Stabilitate externă

Pentru a analiza stabilitatea externă se determină matricea de transfer.

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{R(s)}{p(s)} = \frac{\bar{R}(s)}{\chi(\text{s})} = \frac{\begin{bmatrix} \overline{r_{11}}(s) \\ \overline{r_{21}}(s) \end{bmatrix}}{\chi(\text{s})}$$

$$T(s) = \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot s + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot s^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s^3 + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot s^4 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s^5}{12 - 2s + 13s^2 - s^3 + 13s^4 - s^5 + s^6 + s^7}$$

$$T(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^5 - 2s^4 + 4s^3 + s^2 - 2s + 4 \\ s^5 - s^4 + s^3 + 8s^2 - 8s + 8 \end{bmatrix}}{s^7 + s^6 - s^5 + 13s^4 - s^3 + 13s^2 - 2s + 12}$$

Se determină forma ireductibilă a lui $T(s)$ eliminând c.m.M.d.c. al tuturor polinoamelor prezente în expresia sa. Această operație se face cu algoritmul lui Euclid la nivelul tabloului.

$$\text{c.m.M.d.c.}\{\overline{r_{11}}, \overline{r_{21}}, \chi\}$$

Se obține primul tablou din algoritmul lui Euclid:

$s^5 - 2s^4 + 4s^3 + s^2 - 2s + 4$
$s^5 - s^4 + s^3 + 8s^2 - 8s + 8$
$s^7 + s^6 - s^5 + 13s^4 - s^3 + 13s^2 - 2s + 12$

- Se împarte succesiv polinomul $s^7 + s^6 - s^5 + 13s^4 - s^3 + 13s^2 - 2s + 12$ la polinomul $s^5 - 2s^4 + 4s^3 + s^2 - 2s + 4$ și se va obține polinomul $s^2 + 3s + 1$ și restul $2s^4 - 6s^3 + 14s^2 - 12s + 8$.
- Se împarte polinomul $s^5 - 2s^4 + 4s^3 + s^2 - 2s + 4$ la $s^5 - s^4 + s^3 + 8s^2 - 8s + 8$ și se va obține polinomul -1 și restul $-s^4 + 3s^3 - 7s^2 + 6s - 4$.

Se obține al doilea tablou din algoritmul lui Euclid:

$s^5 - 2s^4 + 4s^3 + s^2 - 2s + 4$
$s^4 - 3s^3 + 7s^2 - 6s + 4$
$2s^4 - 6s^3 + 14s^2 - 12s + 8$

- Se împarte succesiv polinomul $s^5 - 2s^4 + 4s^3 + s^2 - 2s + 4$ la polinomul $s^4 - 3s^3 + 7s^2 - 6s + 4$ și se va obține polinomul $s + 1$ și restul 0 .
- Se împarte polinomul $2s^4 - 6s^3 + 14s^2 - 12s + 8$ la $s^4 - 3s^3 + 7s^2 - 6s + 4$ și se va obține câtul 2 și restul 0 .

Se obține al treilea tablou din algoritmul lui Euclid:

$s^4 - 3s^3 + 7s^2 - 6s + 4$
0
0

→ c.m.M.d.c = $s^4 - 3s^3 + 7s^2 - 6s + 4$

În continuare ar trebui determinate câturile împărțirii celor 3 polinoame la c.m.M.d.c.

Pentru exercițiul propus ne interesează doar împărțirea polinomului de la numitorul matricei de transfer. Se va obține polinomul $s^3 + 4s^2 + 4s + 3$.

$$T(s) = \frac{\begin{bmatrix} \overline{r_{11}}(s) \\ \overline{r_{21}}(s) \end{bmatrix}}{s^3 + 4s^2 + 4s + 3}$$

Se aplică criteriul lui Hurwitz pentru a determina stabilitatea externă a sistemului.

$$p(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 3$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Pentru exemplul nostru avem:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = |a_2| = 4 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 3 > 0$$

$$H_3 = 3 \cdot 16 - 9 > 0$$

Deoarece minorii principali sunt strict pozitivi, SL N este strict stabil extern.

Problema 2

Fie SL D având realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0 & 1 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0 & 1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Să se analizeze stabilitatea internă și externă, utilizând criteriul lui Routh-Hurwitz.

Rezolvare

Stabilitate internă

Pentru a determina stabilitatea internă a sistemului dat, se determină polinomul caracteristic dat de ecuația:

$$\chi(z) = \det(zI - A) = a_0 + z \cdot a_1 + z^2 \cdot a_2 + \cdots + z^n \cdot a_n\ , \quad a_n > 0$$

pentru care se va aplica transformarea omografică *w* dată de ecuația

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

Se observă că realizarea este una standard observabilă. Astfel, se poate scrie direct polinomul caracteristic:

$$\chi(z) = z^4 + 0.9z^3 + 0.06z^2 - 0.016z = z(z^3 + 0.9z^2 + 0.06z - 0.016) = z \cdot \chi_1(z)$$

În continuare se aplică transformarea omografică w doar pentru $\chi_1(z)$.

$$\chi_1(w) = (1+w)^3 + 0.9(1+w)^2(1-w) + 0.06(1+w)(1-w)^2 - 0.016(1-w)^3$$

$$\chi_1(w) = w^3 + 3w^2 + 3w + 1 - 0.9w^3 - 0.9w^2 + 0.9w + 0.9 + 0.06w^3 - 0.06w^2 - 0.06w + 0.06 + 0.016w^3 - 0.048w^2 + 0.048w - 0.016$$

$$\chi_1(w) = 0.176w^3 + 1.992w^2 + 3.888w + 1.944$$

Tabloul lui Routh-Hurwitz pentru polinomul $\chi_1(w)$ de grad 3:

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Pentru exemplul nostru avem:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1.992 & 1.944 & 0 \\ 0.176 & 3.888 & 0 \\ 0 & 1.992 & 1.944 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = |a_2| = 1.992 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.992 & 1.944 \\ 0.176 & 3.888 \end{vmatrix} = 1.992 \cdot 3.888 - 1.944 \cdot 0.176 > 0$$

$$H_3 = 1.944 \cdot H_2 > 0$$

Sistemul este asimptotic stabil → este și strict stabil extern.

Implementare în MatLab

Probleme propuse

Problema 1

Fie SL N având realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 & -1 & 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & 1 & 0 & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se analizeze stabilitatea internă și externă, utilizând criteriul lui Hurwitz.

Problema 2

Fie SL D având realizarea de stare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se analizeze stabilitatea internă și externă, utilizând criteriul lui Routh-Hurwitz.