PlatformŇ de e-learning Ůi curriculŇ e-content pentru învŇüŇmântul superior tehnic

Ingineria Calculatoarelor

2. Bazele matematice ale š } Œ]] ( ]] o] š

3. BAZELE MATEMATICE ALE TEORIEI FIABILITĂŢII

3.1 VARIABILE ALEATOARE

Fie Ω o mulţime finită sau numărabilă. Atunci, o variabilă aleatoare poate fi descrisă ca fiind o funcţie ξ, având ca domeniu de definiţie mulţimea părţilor lui Ω, cu valori reale, astfel încât $(\forall)x \in \mathcal{P}(\Omega)$, este definită probabilitatea $P(\xi \le x)$.

$$\xi : \mathcal{P}(\Omega) \to R \tag{3.1}$$

Pentru cazul mulţimilor finite sau numărabile, este uşor de definit o funcţie de probabilitate, specificând valoarea pentru fiecare element sau subset.

Pentru cazul când mulţimea Ω nu mai este numărabilă, nu se mai poate specifica probabilitatea pentru fiecare element. Ca urmare, se introduce funcţia de repartiţie pentru variabila aleatoare ξ, notată $F(x)$.

$$F(x) = P(\xi \le x) \tag{3.2}$$

Deoarece pentru o variabilă aleatoare continuă ξ, probabilitatea $P(\xi = x_0) = 0$, faptul că uneori apare semnul egal, iar uneori nu apare, este lipsit de semnificaţie.

3.2 FUNCŢIA DE REPARTIŢIE. DENSITATEA DE PROBABILITATE

Pentru orice $x \in R$, se defineşte funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ, reprezentând probabilitatea ca variabila aleatoare să ia valori mai mici sau egale cu x.

$$F(x) = P(\xi \le x) \tag{3.3}$$

Proprietăţile funcţiei de repartiţie sunt:

- $F(x)$ este monoton crescătoare:

$$(\forall)x_1 \le x_2,\ \ x_1, x_2 \in R \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2) \tag{3.4}$$

- Fiind o probabilitate, $F(x)$ îndeplineşte următoarele condiţii:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \tag{3.5}$$

$$0 \le F(x) \le 1 \tag{3.6}$$

Conform acestor proprietăţi, rezultă că graficul funcţiei de repartiţie are, aproximativ, forma reprezentată în figura 3.1.

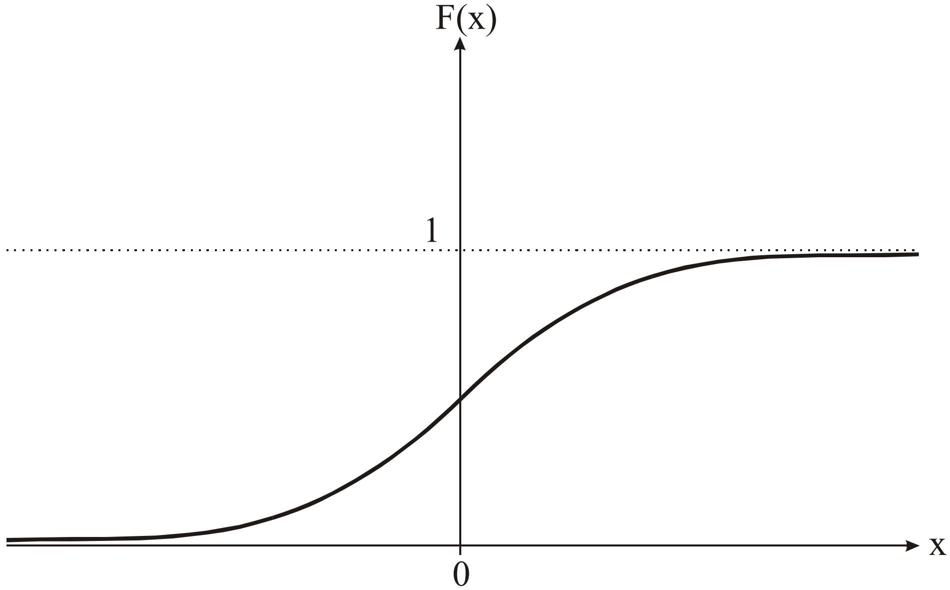

Figura 3.1 - Graficul funcţiei de repartiţie.

În cadrul fiabilităţii, de obicei pe abscisă se află timpul de observare şi atunci funcţia $F(x)$ este definită numai pentru $x \geq 0$.

- $P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a)$
- Dacă există o funcţie pozitivă $f(x)$, integrabilă pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că, $(\forall)x \geq 0$, se verifică egalitatea:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du \tag{3.7}$$

atunci $f(x)$ se numeşte densitate de repartiţie sau densitate de probabilitate pentru variabila aleatoare ξ. Rezultă imediat următoarele proprietăţi:

$$f(x) = F'(x); \quad f(x) \geq 0; \quad P(a < \xi \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{3.8}$$

Proprietatea se referă la variabilele aleatoare continue.

Pentru cazul variabilelor aleatoare discrete este necesară cunoaşterea valorile pe care le ia variabila aleatoare şi probabilităţile de realizare:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) & \cdots \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

în care $x_i, i \in \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ reprezintă valorile variabilei aleatoare ξ; iar $p(x_i), i \in \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ reprezintă probabilitatea realizării evenimentului $x_i, i \in \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$.

Se poate asocia densitatea de repartiţie $f(x) = p(x)$ şi funcţia de repartiţie:

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \tag{3.10}$$

În figurile 3.2 şi 3.3 se prezintă densitatea de probabilitate şi funcţia de repartiţie pentru o variabilă aleatoare ce poate lua patru valori.

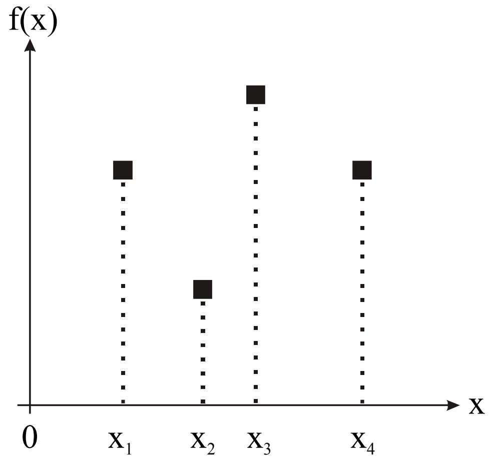

Figura 3.2

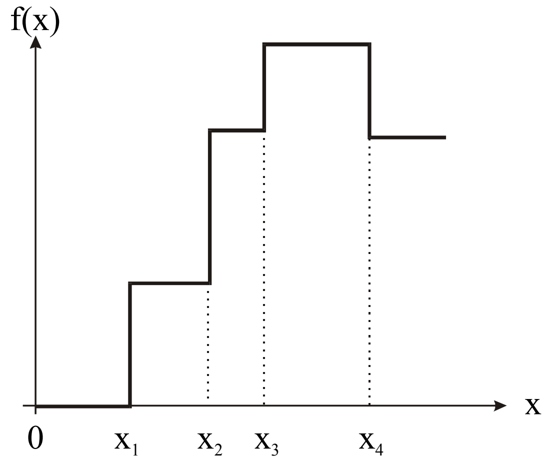

Figura 3.3

S-a remarcat anterior că, dacă funcţia $F(x)$ este derivabilă peste tot, atunci avem de-a face cu o variabilă aleatoare continuă. Dacă, însă, $F(x)$ este derivabilă exceptând un număr individual de puncte (figura 3.4), variabila aleatoare se numeşte mixtă.

Trebuie remarcat că funcţia $F(x)$ este continuă la stânga pe întreg domeniul de definiţie.

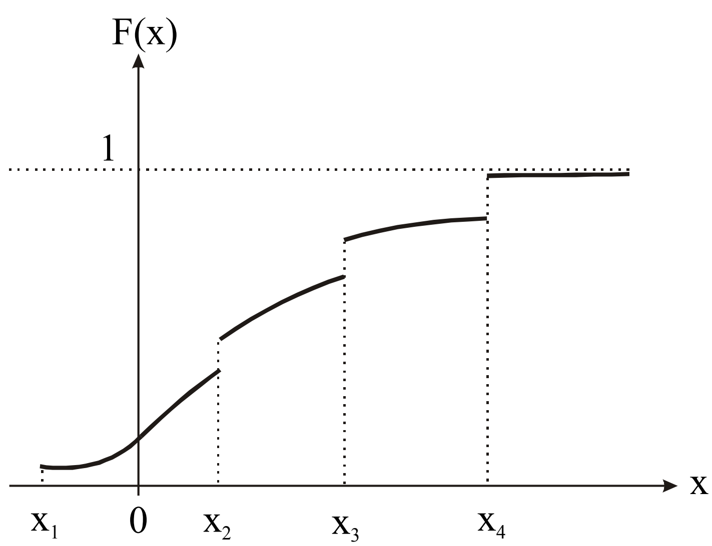

Figura 3.4 - Graficul funcţiei de repartiţei pentru o variabilă aleatoare mixtă.

3.3 VALOAREA MEDIE A UNEI VARIABILE ALEATOARE

Fie ξ o variabilă aleatoare discretă, având distribuția următoare:

$$\xi : \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) & \cdots \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Dacă seria:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(x_n)x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x_n \tag{3.12}$$

este convergentă, atunci ea reprezintă valoarea medie a variabilei aleatoare şi se notează cu m sau $M(\xi)$.

Dacă variabila aleatoare este continuă, cu densitatea de probabilitate $f(x)$, atunci media ei este:

$$m = M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{3.13}$$

Pentru o variabilă aleatoare mixtă:

$$m = M(\xi) = \sum_n p_n x_n + \int_{(C)} x F'(x) dx \tag{3.14}$$

unde suma se efectuează în punctele de discontinuitate, iar integrala pe intervalele de continuitate.

Exemplu: fie $\xi = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ suma punctelor fețelor celor două zaruri obținută la o aruncare.

Variabila aleatoare ξ, care ia ca valoare suma celor două zaruri la o aruncare, are următoarea distribuție:

$$\xi : \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

Valoarea medie a acestei variabile aleatoare este:

$$m = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36}$$

3.4 DISPERSIA UNEI VARIABILE ALEATOARE

Fie ξ o variabilă aleatoare discretă ce poate lua valori x_i cu probabilitățile p_i, $i \in R$. Se defineşte dispersia ei şi se notează cu σ^2 (sau $D(\xi)$)

numărul $M\left[(\xi - m)^2\right]$, adică dispersia variabilei aleatoare $(\xi - m)^2$.

Pentru o variabilă aleatoare discretă, rezultă:

$$\sigma^2 = \sum_n (x_n - m)^2 \cdot p_n \tag{3.15}$$

Dacă ξ este o variabilă aleatoare continuă, atunci:

$$\sigma^2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx \tag{3.16}$$

unde $f(x)$ reprezintă densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare, iar

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{3.17}$$

este valoarea ei medie. Se arată uşor că:

$$\sigma^2 = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 \tag{3.18}$$

deoarece avem:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2mx + m^2) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2m \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx +$$

$$+ m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M(\xi^2) - 2m \cdot m + m^2 = M(\xi^2) - m^2 = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 \tag{3.19}$$

Pentru o variabilă aleatoare mixtă:

$$\sigma^2 = \sum p_n (x_n - m)^2 + \int_{(C)} (x - m)^2 F'(x) dx \tag{3.20}$$

3.5 MOMENTUL DE ORDIN k

Dacă ξ este o variabilă aleatoare discretă, se numeşte moment de ordin k, şi se notează cu m_k sau $M_k(\xi)$, valoarea definită de:

$$m_k = M_k(\xi) = M(\xi^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^k p_n \tag{3.21}$$

Dacă ξ este o variabilă aleatoare continuă, cu densitatea de probabilitate $f(x)$, atunci:

$$m_k = M_k(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \tag{3.22}$$

Pentru o variabilă aleatoare mixtă, rezultă:

$$m_k = M_k(\xi) = \sum_n x_n^k p_n + \int_{(C)} x^k F'(x) dx \tag{3.23}$$

Momentul de ordinul întâi reprezintă chiar valoarea medie a variabilei aleatoare.

3.6 MOMENTUL CENTRAT DE ORDINUL k

Fie ξ o variabilă aleatoare discretă. Se defineşte momentul centrat de ordinul k astfel:

$$\mu_k = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - m)^k p_n \tag{3.24}$$

în care m reprezintă valoarea medie a variabilei aleatoare ξ.

Dacă variabila aleatoare ξ este continuă, atunci:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k f(x) dx. \tag{3.25}$$

Dacă variabila aleatoare ξ este mixtă:

$$\mu_k = \sum_n (x_n - m)^k p_n + \int_{(C)} (x - m)^k f(x) dx \tag{3.26}$$

Se observă că:

$$\mu_k = m_k(\xi - m). \tag{3.27}$$

De asemenea:

$$\mu_2 = \sigma^2 \tag{3.28}$$

care a fost anterior definită. În teoria fiabilităţii sunt foarte importante mărimile m şi σ^2. Se mai utilizează şi abaterea medie patratică:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \tag{3.29}$$

3.7 COEFICIENTUL DE VARIAŢIE

Fie ξ o variabilă aleatoare cu media m şi abaterea medie pătratică σ^2. Se defineşte coeficientul de variaţie, ca fiind:

$$\eta = \frac{\sigma}{\mu}. \tag{3.30}$$

Vor fi enumerate în continuare câteva propoziţii mai importante din cadrul teoriei probabilităţilor, care vor fi utile în viitor.

Dacă $H_i, i = \overline{1 \div n}$ sunt n evenimente care se exclud reciproc şi dacă evenimentul A se poate realiza numai dacă unul dintre evenimentele $H_i, i = \overline{1 \div n}$, se realizează, atunci:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} [P(H_i) \cdot P(A/H_i)] \tag{3.31}$$

unde $P(A/H_i)$ reprezintă probabilitatea realizării evenimentului A, în ipoteza că s-a realizat $H_i, i=\overline{1\div n}$, iar $P(H_i)$ reprezintă probabilitatea realizării evenimentului $H_i, i=\overline{1\div n}$. Formula de mai sus poartă numele de ***formula probabilităţii totale***.

Dacă $P(H_i/A)$ reprezintă probabilitatea de realizare a evenimentului $H_i, i=\overline{1\div n}$, în ipoteza că A s-a realizat, atunci:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n}\left[P(H_j)\cdot P(A/H_j)\right]}=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)} \tag{3.32}$$

şi aceasta reprezintă ***formula lui Bayes***.

Formulele de mai sus au şi un echivalent pentru cazul continuu. Asfel, dacă un eveniment A depinde de valorile unei variabile aleatoare ξ, ce are densitatea de probabilitate $f(x)$, atunci este valabilă formula integrală pentru probabilitatea totală:

$$P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P(A/x)\cdot f(x)\right]dx \tag{3.33}$$

unde $P(A/x)$ reprezintă probabilitatea realizării evenimentului A, în condiţia $\xi=x$.

Teorema lui Bayes devine:

$$f_A(x)=\frac{f(x)\cdot P(A/x)}{P(A)}=\frac{f(x)\cdot P(A/x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}P(A/x)\cdot f(x)dx} \tag{3.34}$$

unde $f_A(x)$ reprezintă densitatea de probabilitate pentru variabila aleatoare ce denotă realizarea evenimentului A. Acest eveniment, rezultat al unei experienţe, depinde de valorile unei variabile aleatoare ξ ce are densitatea de probabilitate $f(x)$.

În continuare se prezintă diferite repartiţii probabilistice, cu aplicaţii în fiabilitate şi în controlul de calitate.