UNIUNEA EUROPEANĂ

GUVERNUL ROMÂNIEI

Instrumente Structurale
2007-2013

Platformă de e-learning și curriculă e-content pentru învățământul superior tehnic

Ingineria Calculatoarelor

7. Procese Markov

3.12.2 PROCESE MARKOV

În cazul în care sistemul analizat are un număr finit sau numărabil de stări, iar timpul de observare este continuu, se obține un proces Markov. În acestă situație, probabilitatea tranziției dintr-o stare în alta, la un anumit moment de timp este întodeauna nulă. Deoarece variabila aleatoare timp este continuă, nu mai putem vorbi de probabilitate de tranziție, ci de densități ale probabilității de tranziție, λ_{ij}:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{X(t+\Delta t) = S_j; X(t) = S_i\}}{\Delta t} \tag{3.149}$$

Dacă densităţile λ_{ij} sunt constante în timp, procesul Markov se numeşte omogen.

Procesul Markov poate fi reprezentat,la fel ca şi un lanţ Markov, printr-un graf orientat având stările sistemului ca noduri. Arcele grafului reprezintă în acest caz densităţile probabilităţilor de tranziţie λ_{ij}, din starea S_i în starea S_j. Sistemul este caracterizat de probabilităţile stărilor. Considerând un sistem cu n stări S_i, $i = 1 \div n$; probabilităţile stărilor sunt $p_i(t)$, $i = 1 \div n$, în care $p_i(t)$ reprezintă probabilitatea ca la momentul t sistemul să se afle în starea S_i.

Vom deduce aceste probabilităţi ca un caz limită al unui lanţ Markov, când intervalul de observare Δt tinde la zero.

Probabilitatea ca sistemul să treacă din starea S_i în starea S_j, în intervalul infinit mic Δt, este, cu o foarte bună aproximaţie, $\lambda_{ij}\ \Delta t$.

Considerăm următoarele evenimente:

- E_1 - sistemul face o tranziţie în starea S_i la momentul $t + \Delta t$;
- E_2 - sistemul face o tranziţie din starea S_i la momentul $t + \Delta t$;

$$P(E_1) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\lambda_{ij}\Delta t; \; P(E_2) = p_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\Delta t \tag{3.150}$$

şi reprezintă probabilitatea ca sistemul să se afle în starea i la momentul t, $p_i(t)$, înmulţită cu probabilitatea ca sistemul să facă o tranziţie din starea S_i.

- $\overline{E_2}$ - evenimentul ca sistemul să fie în starea S_i la momentul t şi să facă o tranziţie la momentul $t + \Delta t$.

$$P(\overline{E_2}) = p_i(t) \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\Delta t\right) \tag{3.151}$$

Atunci evenimentul E, reprezentând faptul că sistemul se află în starea S_i la momentul $t + \Delta t$, rezultă reuniunea evenimentelor disjuncte E_1 şi $\overline{E}_2$. Avem:

$$p_i(t+\Delta t) = P(E) = P(E_1 \cup \overline{E}_2) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\lambda_{ij}\Delta t + p_i(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\Delta t\right) \tag{3.152}$$

$$p_i(t+\Delta t) - p_i(t) = \Delta t\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_j(t) - p_i(t)\Delta t\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij} \tag{3.153}$$

$$\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_j(t) - p_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij} \tag{3.154}$$

Trecând la limită în ultima egalitate, pentru Δt tinde la zero şi obţinem:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \right] \tag{3.155}$$

adică:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij};\ i = 1 \div n \tag{3.156}$$

Acest sistem de ecuaţii diferenţiale poartă numele de ecuaţiile Chapman-Kolmogorov[2].

Acestui sistem de ecuaţii i se adaugă şi setul de condiţii iniţiale $p_i(0)$, i = 1÷n.

Ecuaţiile Chapman-Kolmogorov pot fi uşor scrise pornind de la graful asociat sistemului, folosind următoarea regulă:

- **derivata probabilităţii unei stări este egală cu suma tuturor "probabilităţilor" care conduc de la orice stare în starea considerată din care se scade suma tuturor "probabilităţilor" care conduc din starea considerată în alte stări**. Ghilimelele au fost puse deoarece termenul a fost impropriu folosit, având de fapt derivatele unor probabilităţi (densităţi de probabilitate).

În general, este convenabil să se presupună că tranziţiile sistemului sunt provocate de nişte fluxuri de evenimente. În acest caz, densităţile probabilităţilor de tranziţie λ_{ij}, provin de la fluxurile de evenimente.

Dacă procesul durează un timp îndelungat, este interesant de cunoscut comportamentul probabilităţilor stărilor, $p_i(t)$, pentru t tinzând către infinit, adică

$$\lim_{t \to \infty} p_i(t) = p_i;\ i = 1 \div n \tag{3.157}$$

Dacă aceste limite există, înseamnă că după un anumit timp suficient de mare, procesul se stabilizează. Sistemul trece dintr-o stare în alta, însă probabilităţile stărilor nu se mai modifică. Aceste limite reprezintă în mod relativ timpul mediu pe care îl petrece sistemul în fiecare stare.

Un sistem pentru care există limitele probabilităţilor stărilor pentru t tinzând către infinit se numeşte ***sistem ergodic***, iar procesul stocastic respectiv se numeşte ***proces ergodic***.

Pentru un sistem ergodic rezultă că probabilitatea de a se afla într-o anumită stare, după un timp suficient de lung, nu depinde de starea din care se pleacă.

Nu este suficient ca un sistem să fie omogen pentru ca să fie şi ergodic. Pentru determinarea ergodicităţii stările sistemului sunt împărţite în stări esenţiale şi stări neesenţiale. Acestă clasificare a stărilor a fost descrisă,

[2] Sydney Chapman (1888-1970), matematician englez cu cercetări de matematică aplicată. Andrei Nicolaevici Kolmogorov, matematician rus cu lucrări importante în domeniul teoriei probabilităţilor.

aproximativ în acelaşi timp, de **A.N. Kolmogorov** pentru lanţurile Markov având o mulţime numărabilă de stări şi de **W. Doeblin** pentru lanţurile Markov cu număr finit de stări.

Se notează cu $P_{ij}(n)$ probabilitatea ca sistemul să treacă din starea S_i în starea S_j, în exact n paşi.

O stare S_i se numeşte neesenţială sau de tranziţie dacă există o stare S_j şi un număr n astfel încât $P_{ij}(n) > 0$, dar $P_{ji}(m) = 0$, pentru orice m. Pentru un proces Markov, când timpul este continuu, în locul numărului de paşi, n, se poate considera un interval de timp Δ, în care să aibă loc tranziţia din starea S_i în starea S_j. Din definiţie, rezultă că o stare neesenţială poate fi atinsă de sistem, însă odată părăsită, nu se mai revine în ea.

Stările S_1 şi S_2 din figura 3.16 reprezintă exemple de stări neesenţiale.

Toate stările care nu sunt neesenţiale se numesc ***esenţiale***.Rezultă deci că o stare $\mathbf{S_i}$ este esenţială dacă nu există nici o altă stare $\mathbf{S_j}$, în care să se ajungă pe un drum oarecare din $\mathbf{S_i}$, fără ca sistemul să mai poată reveni în $\mathbf{S_i}$. Stările $\mathbf{S_3}$ şi $\mathbf{S_4}$ din figura 3.16 sunt exemple de stări esenţiale.

Dacă S_i şi S_j sunt două stări esenţiale şi, pentru cazul discret, există două numere naturale m şi n, astfel încât $P_{ij}(n) > 0$, $P_{ji}(m) > 0$,atunci stările S_i şi S_j se numesc comunicante. Această relaţie este tranzitivă. Stările S_3 şi S_4 din figura 3.16 sunt stări comunicante, în timp ce stările S_3 şi S_4 din figura 3.17, deşi sunt esenţiale, nu sunt stări comunicante.

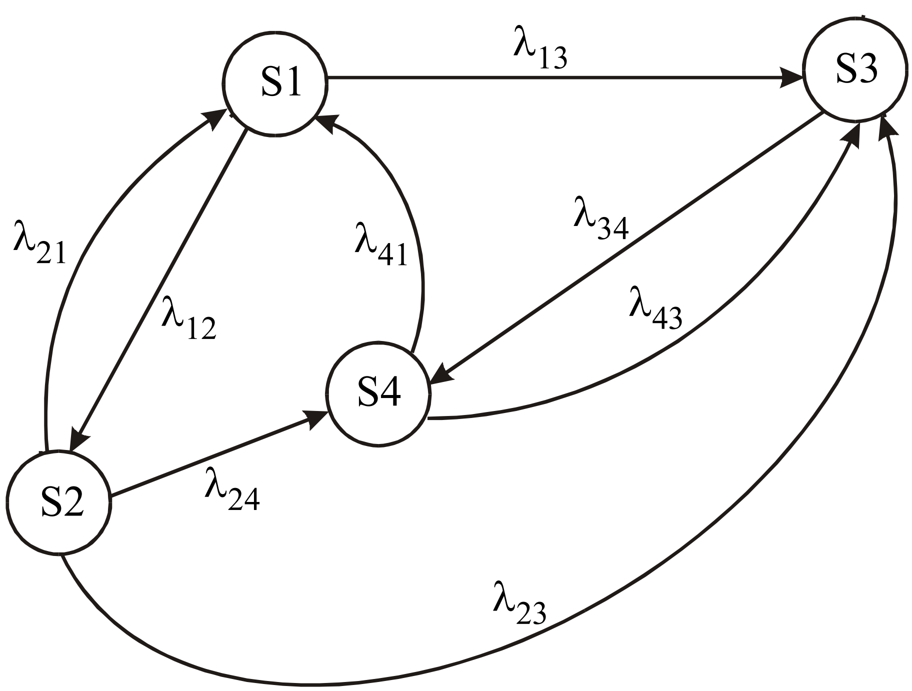

Figura 3.16 - Reprezentarea unui proces Markov.

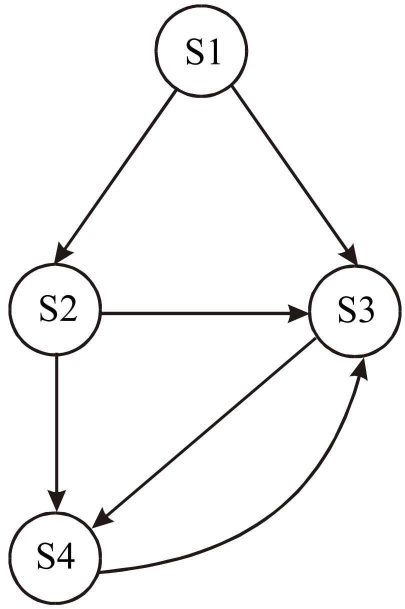

Figura 3.17 - Diagrama de tranziţii asociată.

Se poate demonstra că, pentru un sistem cu număr finit de stări, condiţia necesară şi suficientă pentru ergodicitate este ca toate stările esenţiale să fie comunicante.

Pentru stările neesenţiale limitele probabilităţilor stărilor sunt zero, deoarece odată părăsită o stare neesenţială nu se mai revine în ea.

În cazul în care un sistem este ergodic, limitele probabilităţilor stărilor se pot obţine din ecuaţiile Chapman-Kolmogorov, în care se anulează toate derivatele. Se obţine astfel un sistem liniar de n ecuaţii cu n necunoscute. Mai trebuie considerată şi ecuaţia

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \tag{3.158}$$

care trebuie întotdeauna verificată. Sistemul caracterizat prin graful din figura 3.16 este ergodic, în timp ce sistemul având graful din figura 3.17 nu este ergodic.

Dacă sistemul are un număr infinit de stări, atunci condiţia enunţată anterior nu mai este suficientă şi mai trebuie adăugate restricţii suplimentare.

Când coeficienţii λ_{ij} sunt funcţii de timp, deci procesul nu mai este omogen, ecuaţiile Chapman-Kolmogorov sunt dificil de rezolvat. Vom prezenta în continuare un caz de rezolvare a unor ecuaţii difernţiale de ordinuk întâi, cu coeficienţi variabili în timp.